Persamaan Diferensial Pertemuan XII

Bab IV. PD Order Tinggi - Metode Variasi Parameter

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id
eminugroho@uny.ac.id

Overview

1. Solusi Umum
2. Metode Variasi Parameter

PD Nonhomogen

Pada pertemuan ini, akan dicari solusi dari PD order tinggi nonhomogen dengan koefisien konstan.

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x). \tag{1}$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstanta real dan $F(x) \neq 0$.
Solusi umum dari PD 1 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y = y_c + y_p$$

dengan
y_c adalah solusi komplementer (solusi umum bagian homogen),
y_p adalah solusi khusus.

Metode Variasi Parameter

Untuk dapat memahami metode variasi parameter secara umum, sebelumnya akan dibahas terlebih dulu untuk kasus $n = 2$.

$$a_o \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = F(x). \tag{2}$$

Misalkan solusi umum bagian homogennya adalah

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Langkah awal metode variasi parameter adalah menyatakan solusi khusus PD Nonhomogen dengan merubah konstanta pada solusi komplementer ke dalam bentuk fungsi atas variabel independent.

$$y_p(x) = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x). \tag{3}$$

Langkah selanjutnya yaitu menentukan nilai v_1 dan v_2 sedemikian hingga y_p memenuhi solusi khusus PD nonhomogen.

lanjutan

Turunan pertama Fungsi 3 terhadap x adalah

$$y_p' = v_1'(x)y_1(x) + v_1(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_2(x)y_2'(x).$$

Untuk menyederhanakan bentuk, misalkan dipilih v_1 dan v_2 yang memenuhi

$$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{4}$$

sehingga bentuk turunan pertama menjadi lebih sederhana yaitu

$$y_p' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x). \tag{5}$$

Darisini diperoleh turunan keduanya yaitu

$$y_p'' = v_1'(x)y_1'(x) + v_1(x)y_1''(x) + v_2'(x)y_2'(x) + v_2(x)y_2''(x). \tag{6}$$

Lanjutan

Substitusikan 3, 5 dan 6 pada Persamaan 2 maka diperoleh

$$a_o\left[v_1'(x)y_1'(x)+v_1(x)y_1''(x)+v_2'(x)y_2'(x)+v_2(x)y_2''(x)\right]$$
$$+a_1\left[v_1(x)y_1'(x)+v_2(x)y_2'(x)\right]+a_2\left[v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)\right]=F(x).$$

Kelompokkan suku-suku yang mempunyai faktor $v_1(x)$ serta $v_2(x)$ diperoleh

$$\left[a_0y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_2y_1(x)\right]v_1(x)+\left[a_0y_2''(x)+a_1y_2'(x)+a_2y_2(x)\right]v_2(x)$$
$$+a_0\left[v_1'(x)y_1'(x)+v_2'(x)y_2'(x)\right]=F(x)$$

Karena y_1 dan y_2 adalah solusi bagian homogen, maka persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$v_1'(x)y_1'(x)+v_2'(x)y_2'(x)=\frac{F(x)}{a_0}. \tag{7}$$

Lanjutan

Jadi, fungsi v_1 dan v_2 harus memenuhi dua syarat yaitu 4 dan 7. Jika dinyatakan dalam bentuk operasi matriks,

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{F(x)}{a_0} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Dengan menggunakan metode substitusi-eliminasi atau metode Cramer diperoleh solusi

$$v_1'(x) = -\frac{F(x)y_2(x)}{a_0 W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}, \quad v_2'(x) = \frac{F(x)y_1(x)}{a_0 W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}$$

Integralkan kedua ruas terhadap x, diperoleh

$$v_1(x) = -\int \frac{F(x)y_1(x)}{a_0 W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}\, dx, \quad v_2(x) = \int \frac{F(x)y_2(x)}{a_0 W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}\, dx.$$

Ringkasan

Langkah-langkah mencari solusi khusus menggunakan Metode Variasi Parameter adalah

1. Mencari solusi umum bagian homogen. Misalkan solusinya adalah

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

2. Menentukan nilai v_1 dan v_2 sedemikian sehingga solusi khususnya adalah

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

dengan

$$v_1(x) = -\int \frac{F(x) y_2(x)}{a_0 W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}\, dx, \quad v_2(x) = \int \frac{F(x) y_1(x)}{a_0 W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}\, dx$$

dimana

$$W\left[y_1(x), y_2(x)\right] = det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}.$$

Contoh 1 I

Perhatikan PD berikut.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x}. \tag{9}$$

Penyelesaian :
Solusi bagian homogen dari PD 9 adalah

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

dan

$$W[e^{3x}, e^{-x}] = det \begin{bmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{bmatrix} = -4e^{2x}.$$

Akibatnya, solusi khusus bagian nonhomogen dari PD adalah

$$y_p(x) = v_1(x)e^{3x} + v_2(x)e^{-x}.$$

Contoh 1 II

dengan

$$v_1(x) = -\int \frac{2e^{4x} \cdot e^{-x}}{-4e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}e^x + c_3.$$

dan

$$v_2(x) = \int \frac{2e^{4x} \cdot e^{3x}}{-4e^{2x}}\, dx = -\frac{1}{10}e^{5x} + c_4.$$

Karena y_p merupakan solusi khusus, misalkan dipilih $c_3 = c_4 = 0$ sehingga jika disubstitusikan pada y_p diperoleh

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}e^x\right) e^{3x} + \left(-\frac{1}{10}e^{5x}\right) e^{-x}.$$

Contoh 1 III

Jadi, solusi umum nonhomogen dari PD 9 adalah

$$\begin{aligned} y(x) &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2} e^{x}\right) e^{3x} + \left(-\frac{1}{10} e^{5x}\right) e^{-x} \\ &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{2}{5} e^{4x}. \end{aligned}$$

Latihan Soal

Bandingkan cara mencari solusi dari PD berikut menggunakan Metode Variasi Parameter. Soal-soal berikut telah dicari solusinya menggunakan Metode Koefisien Tak Tentu pada pertemuan 11.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}$.
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x$.
3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2\sin x$.
4. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^x$.

Tentukan solusi umum untuk PD nonhomogen berikut menggunakan Metode Variasi Parameter.

1. $y'' - 2y' - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$
3. $y'' + 2y' + 2y = 5\sin 2x$

The End