Persamaan Diferensial Pertemuan XIII

Bab IV. PD Order Tinggi - Cauchy Euler

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id
eminugroho@uny.ac.id

Overview

Bentuk Umum

Persamaan Cauchy Euler adalah PD order tinggi dengan koefisien variabel. Bentuk umum persamaan ini adalah

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=F(x),$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ adalah konstanta.
Perhatikan bahwa masing-masing suku pada PD mempunyai bentuk dasar yang sama yaitu

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}.$$

Untuk mencari solusinya, PD ditransformasi terlebih dahulu menggunakan transformasi $x=e^t$.

Teorema- I

Theorem

Transformasi $x = e^t$ dapat mereduksi persamaan

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x),$$

menjadi PD linear dengan koefisien konstan.

Sebagai ilustrasi, akan dibuktikan untuk $n = 2$.

$$a_0 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = F(x).$$

Karena $x = e^t$, maka $\frac{dx}{dt} = e^t$ atau $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right).\\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}\\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).\end{aligned}$$

Darisini diperoleh

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

Teorema- III

Substitusikan transformasi ini pada persamaan maka diperoleh

$$a_0\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+a_1\left(\frac{dy}{dt}\right)+a_2y=F(e^t),$$

$$A_0\frac{d^2y}{dt^2}+A_1\frac{dy}{dt}+A_2y=F(e^t).$$

dengan

$$A_0=a_0,\quad A_1=-a_0+a_1,\quad \text{dan}\quad A_2=a_2.$$

Selanjutnya persamaan dapat diselesaikan dengan metode variasi parameter atau metode koefisien tak tentu.

Example

Tentukan solusi umum dari Persamaan Diferensial berikut :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3.$$

Jawab :
Misalkan $x = e^t$, maka

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \quad \text{dan} \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.$$

Substitusikan pada PD maka diperoleh PD yang baru yaitu

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}.$$

Contoh 1- II

Solusi umum dari PD adalah

$$y = y_c + y_p.$$

Mudah ditunjukkan bahwa solusi komplementer y_c adalah

$$y_c = c_1 e^t + c_2 e^2 t.$$

Selanjutnya untuk mencari y_p, digunakan metode koefisien tak tentu. Karena $F(t) = e^{3t}$ bukan merupakan anggota basis solusi komplementer, maka dimisalkan

$$y_p = Ae^{3t} \quad \rightarrow y_p' = 3Ae^{et} \quad \text{dan} \quad y_p'' = 9Ae^{3t}.$$

Substitusikan pada PD maka nilai A yang memenuhi adalah $\frac{1}{2}$. Jadi solusi umum PD adalah

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t} \quad \rightarrow \quad y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3.$$

Solusi Cauchy Euler orde-n

Untuk mencari bentuk transformasi dari $x^k \frac{d^k y}{dx^k}$, akan digunakan tehnik pola. Perhatikan untuk $k = 3$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] \\
&= \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3 y}{dt^3}\frac{dt}{dx} - \frac{d^2 y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right) \\
&= \frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

Lanjutan

Diperoleh pola berikut :

$$
\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\\
x^2\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\\
x^3\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}
$$

Akibatnya, jika $r^k = \frac{d^ky}{dt^k}$ maka

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k} = r(r-1)(r-2)\dots(r-[k-1])$$

Contoh 2 - I

Example

Tentukan solusi umum dari

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} - 8y = 4\ln x.$$

Jawab :
Dimisalkan $x = e^t$, maka

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \\ x^3\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Contoh 2 - II

Akibatnya PD dapat ditransformasi menjadi

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 7\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} - 8y = 4t.$$

Solusi komplementer PD adalah

$$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t}.$$

Selanjutnya karena $4t$ tidak memuat anggota basis solusi komplementer, dimisalkan

$$y_p = At + B \quad \rightarrow \quad y_p' = A,\ y_p'' = 0, \quad \text{dan} \quad y_p''' = 0.$$

Substitusikan pada PD diperoleh

$$14A - 8(At + B) = 4t \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad B = -\frac{7}{8}.$$

Contoh 2 - III

Jadi, solusi umum PD adalah

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2} t - \frac{7}{8} \\ &= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{2} \ln x - \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Latihan

Tentukan solusi dari Persamaan Caucy Euler berikut :

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$
2. $3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$
3. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$
4. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 10x\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$

Pengayaan.

Tentukan solusi dari persamaan cauchy euler berikut dengan memisalkan $x + 2 = e^t$

$$(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

The End