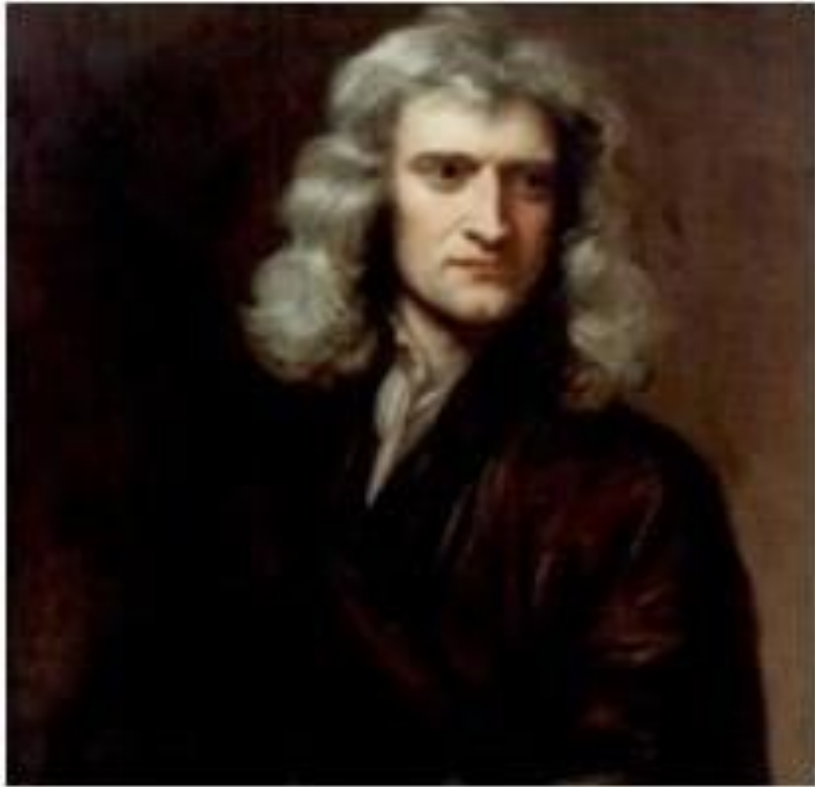


# Bab 5. Spring Mass System

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Nikenasih Binatari

## Second Newton's Law



“Percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya total yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massanya. Arah percepatan sama dengan arah gaya total yang bekerja padanya”.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

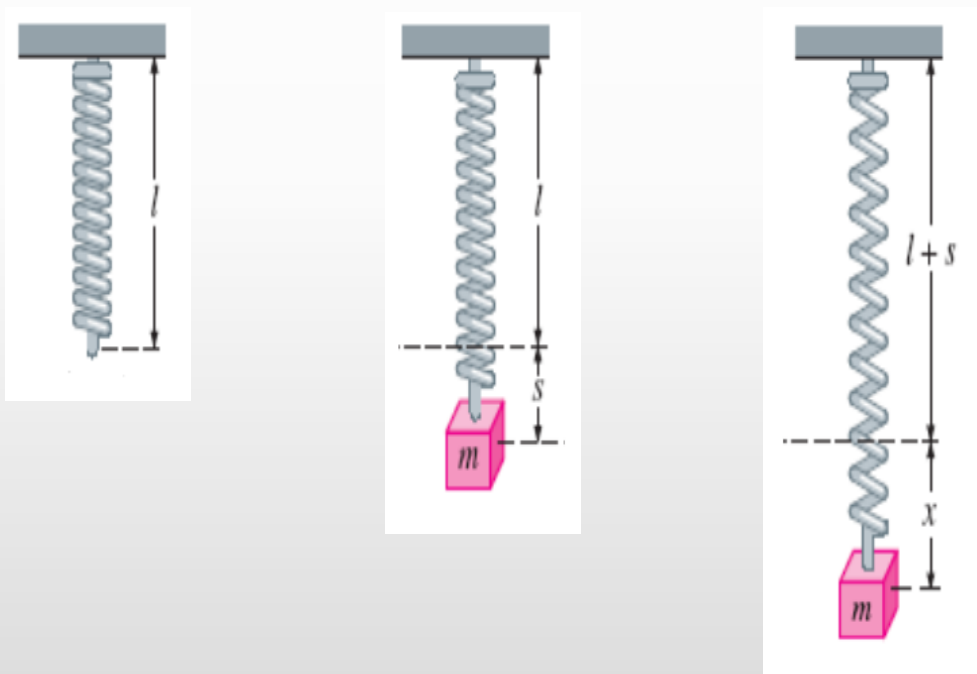
SOURCE :

<http://www.studiobelajar.com/hukum-newton-1-2-3/>

# Kasus

Sebuah pegas yang panjangnya  $l$  diberi beban dengan massa  $m$ .

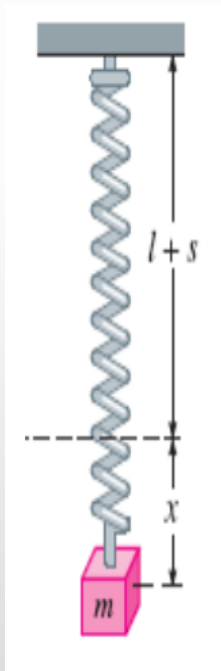
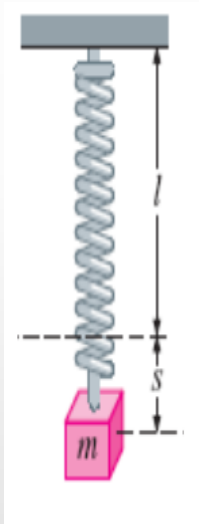
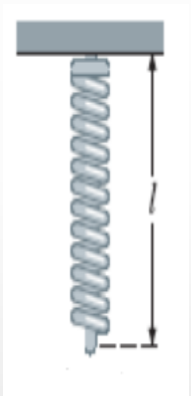
Akibatnya, pegas akan memanjang sejauh  $L$ .



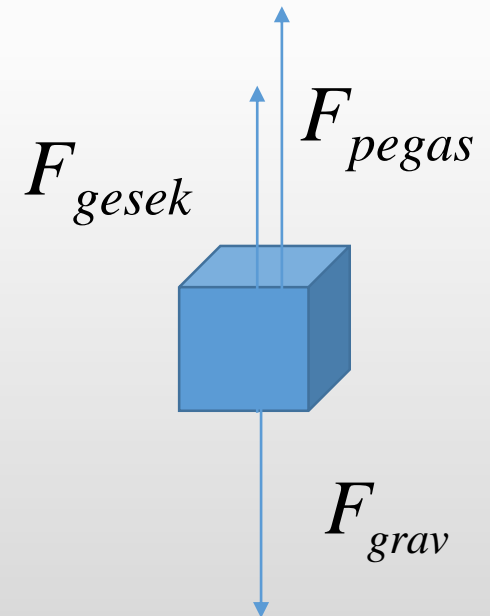
Apabila beban kemudian ditarik sejauh  $X_0$  kemudian dilepaskan, maka beban akan bergerak naik turun.

Misalkan  $x$  adalah panjang pergerakan benda dihitung dari posisi equilibrium (sebelum ditarik)  $x(t)$  ?

# Kasus



Gaya-gaya yang mungkin bekerja pada beban.

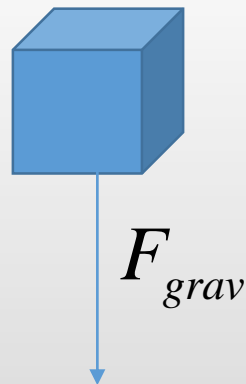


# TYPES OF FORCES-1

- GRAVITATIONAL FORCE ( $F_{grav}$ )

The force of gravity is the force at which the earth, moon, or other massively large object attracts another object towards itself.

$$F_{grav} = m \cdot g$$

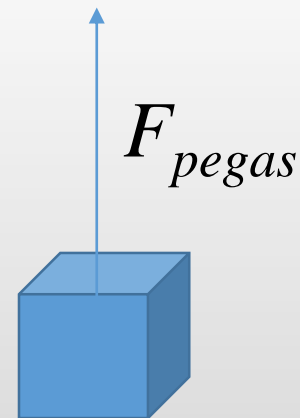


# TYPES OF FORCES-2

- SPRING FORCE ( $F_{spring}$ )

Gaya pegas adalah gaya yang diberikan oleh kompresi atau peregangan pada benda apa pun yang melekat padanya.

$$F_{spring} = -k(x + s)$$

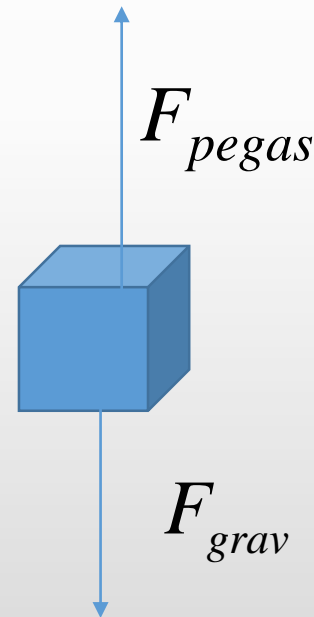


# Notes :

Pada posisi ekuilibrium (yaitu saat beban tidak ditarik,  $x = 0$ ), berlaku hukum Newton III yaitu

Hukum Newton 3

“Ketika suatu benda memberikan gaya pada benda kedua, benda kedua tersebut memberikan gaya yang sama besar tetapi berlawanan arah terhadap benda pertama.”



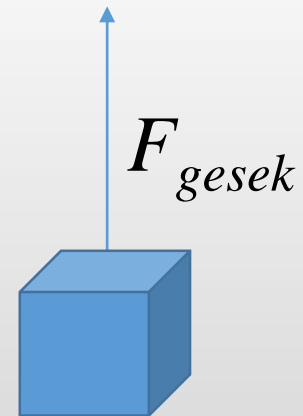
$$mg = ks$$

# TYPES OF FORCES-3

- Friction force ( $F_{\text{gesek}}$ )

Gaya gesekan adalah gaya yang diberikan oleh suatu permukaan ketika suatu benda bergerak melintasinya atau berusaha untuk melewatinya. Gaya gesekan melawan gerakan objek.

$$F_{\text{gesek}} = -bv$$





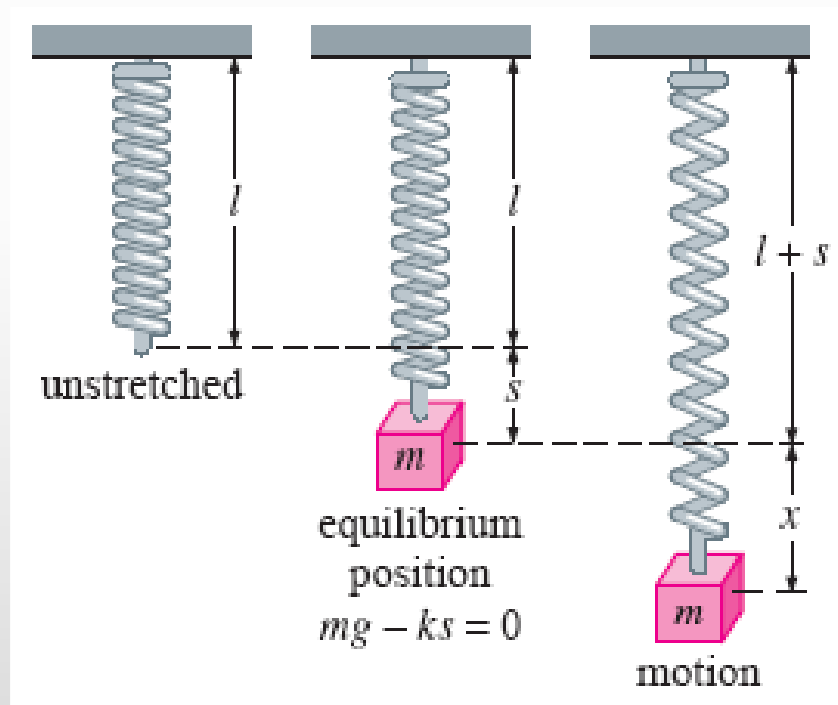
# TYPES OF FORCES-4

## **External Force (F)**

Gaya luar yang bekerja pada sistem

# Kasus I - FREE UNDAMPED MOTION

- No friction forces, no external force



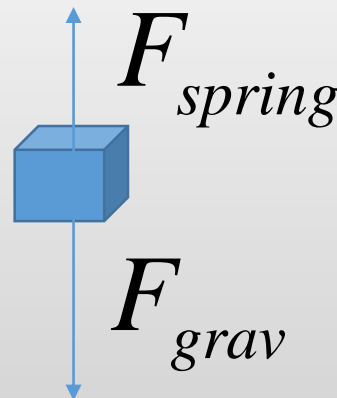
Modelnya :

$$ma = \sum F$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{spring} + F_{grav}$$

$$= -k(x + s) + mg$$

$$= -kx$$



# FREE UNDAMPED MOTION

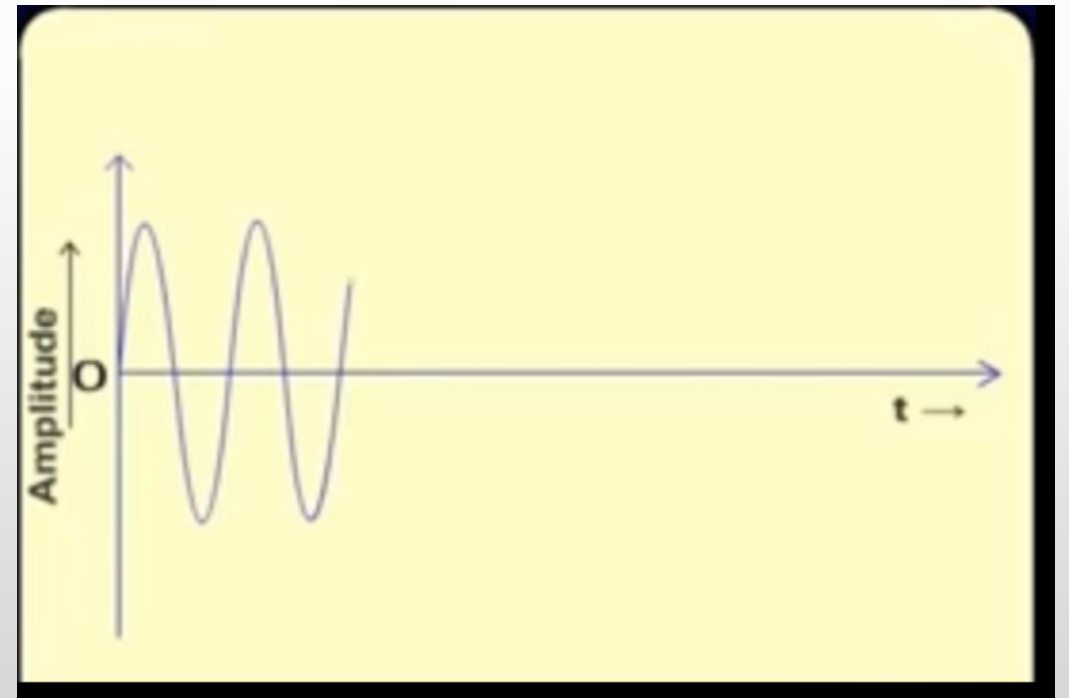
- Solution :

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Misalkan diketahui  $x(0)=x_0$  dan  $x'(0) = v_0$  maka

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + (v_0/\omega) \sin \omega t$$



# Contoh-1

- Sebuah benda bermassa 50 gram diikat pada ujung pegas sehingga pegas tertarik sepanjang 50 cm. Mula-mula, pegas diregangkan sejauh 75cm dari titik ekuilibrium dengan kecepatan awal 0 cm/s. Tentukan pergerakan dari benda tersebut.

- Model yang terbentuk :

$$50 \text{ gram} = 1/20 \text{ kg}$$

$$mg = ks \rightarrow k = \frac{mg}{s} = \frac{1}{20} \cdot \frac{10}{0,5} = 1$$

$$\frac{1}{20} x'' + x = 0$$

$$x(0) = \frac{3}{4}, x'(0) = 0$$

# Solusi

$$\frac{1}{20}x'' + x = 0$$

$$x(0) = \frac{3}{4}, x'(0) = 0$$

Persamaan Karakteristik



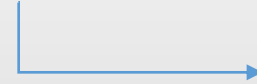
$$\frac{1}{20}m^2 + 1 = 0$$

Solusi Karakteristik



$$m = \pm\sqrt{-20}$$

$$= \pm\sqrt{20}i$$

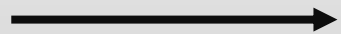


$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{\sqrt{-20}t} + c_2 e^{-\sqrt{-20}t} \\ &= C_1 \cos \sqrt{20}t + C_2 \sin \sqrt{20}t\end{aligned}$$

$$x(0) = \frac{3}{4}$$

$$x'(0) = 0$$

Substitusikan nilai awal

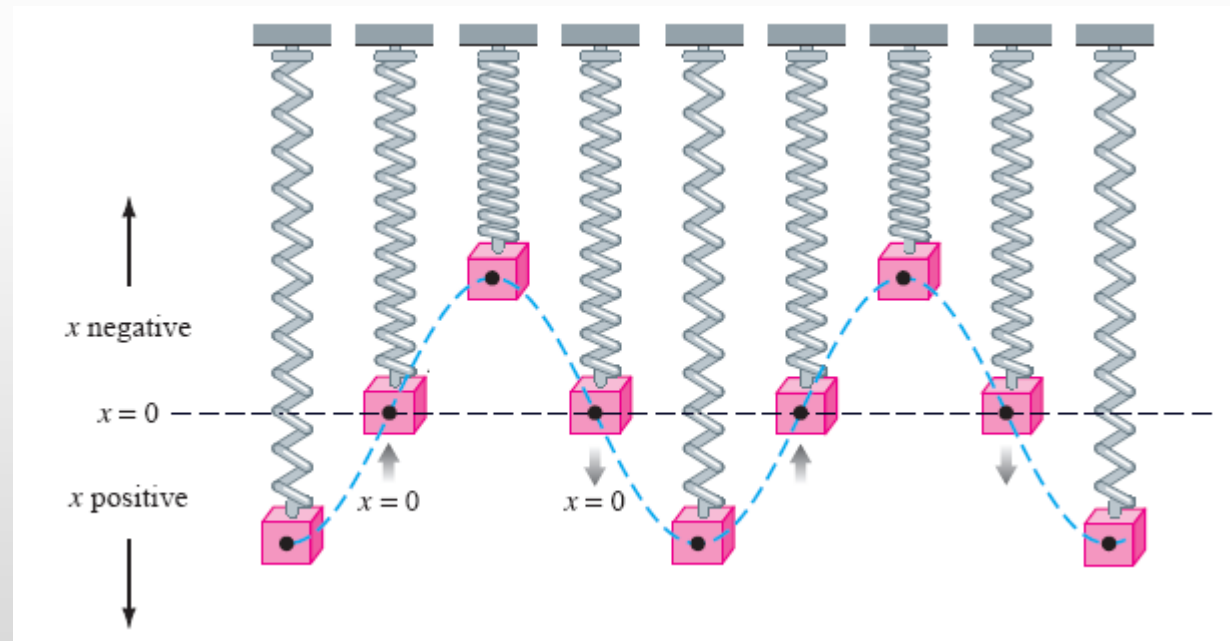


$$C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = 0$$

Solusi khususnya adalah

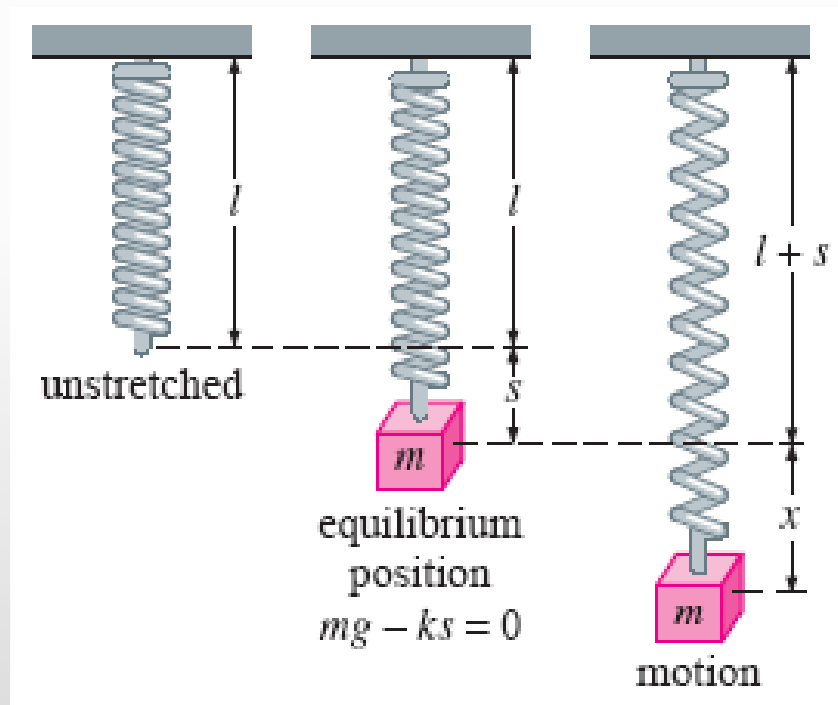
$$x(t) = \frac{3}{4} \cos \sqrt{20}t$$

$$x(t) = \frac{3}{4} \cos \sqrt{20}t$$



# Kasus II - DAMPED MOTION

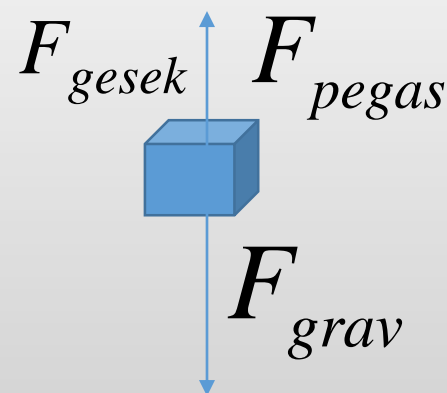
- no external force



Modelnya :

$$ma = \sum F$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{pegas} + F_{grav} + F_{gesek}$$



$$= -k(x + s) + mg - b \frac{dx}{dt}$$

$$= -kx - b \frac{dx}{dt}$$

## Contoh-2

- Sebuah benda bermassa 10 gram diikat pada ujung pegas sehingga pegas tertarik sepanjang 50 cm. Mula-mula, pegas diregangkan sejauh 75cm dari titik ekuilibrium dengan kecepatan awal 0 cm/s. Tentukan pergerakan dari benda tersebut jika terdapat gaya gesek sebesar  $0,2v$ .

- Model yang terbentuk :
$$\frac{1}{100}x'' + 0,2x' + x = 0$$
$$x(0) = \frac{3}{4}, x'(0) = 0$$



# Solusi

$$\frac{1}{100}x'' + 0,2x' + x = 0$$

$$x(0) = \frac{3}{4}, x'(0) = 0$$

Persamaan Karakteristik

$$m^2 + 20m + 100 = 0$$

Solusi Karakteristik

$$m_{1,2} = -10$$

$$x(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 t e^{-10t}$$

$$x(0) = \frac{3}{4}$$

Substitusikan nilai awal

$$C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{15}{2}$$

$$x'(0) = 0$$

Solusi khususnya adalah

$$x(t) = \frac{3}{4} e^{-10t} + \frac{15}{2} t e^{-10t}$$

- Darisini dapat dilihat bahwa beban tidak akan mengalami osilasi.
- Dengan gesekan tersebut, Beban langsung menuju titik ekuilibrium setelah 0,72 detik.

