Aplikasi Persamaan Diferensial Linear Order Dua dengan Koefisien Konstan
"Gerak Bebas dan Tidak Teredam"

OLEH :

KELOMPOK 1

Ni Kadek Swari Nandini(17301241004)
Novilia Risma Wigati (17301241005)
Nur Hidayah Br Karo (17301241006)
Nurdina Hasna Nafisa Al Marza (17301241051)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2019

1 Pendahuluan

Persamaan Diferensial Linear Order Tinggi merupakan persamaan yang memiliki berbagai penerapan di dalam kehidupan sehari-hari. Khususnya untuk persamaan diferensial linear order dua dengan koefisien konstan memiliki berbagai aplikasi dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya penerapannya terdapat pada bidang fisika, teknik listrik juga pada teknik mesin. Salah satu aplikasi persamaan diferensial linear order dua dengan koefisien konstan yaitu gerak bebas dan tidak teredam akan dijelaskan lebih lanjut pada artikel ini.

2 Gerak Bebas dan Tidak Teredam

Sistem gerak bebas dan tidak teredam merupakan sistem gerak dengan gaya luar yaitu $F(t) = 0$ dan peredam $a = 0$. Sistem ini akan menghasilkan persamaan diferensial order 2. Penyelesaian sistem ini dilakukan dengan menentukan akar-akar pada persamaan karakteristik pada persamaan diferensial orde 2. Penyelesaian sistem gerak bebas tak teredam pada pembahasan ini dapat ditunjukkan melalui parameter amplitudo, sudut fase, frekuensi, dan periode gerak benda.

Diketahui persamaan (1) pada materi persamaan diferensial dari getaran massa pada pegas yaitu sebagai berikut :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{1}$$

Jika nilai a = 0 maka gerakan disebut tidak teredam, serta jika tidak ada gaya luar yang mempengaruhi maka nilai F(t) = 0 untuk semua nilai t dan gerak disebut bebas.

Sekarang kita akan mempertimbangkan kasus khusus yaitu gerak bebas, dan tidak teredam, yaitu kasus dimana keduanya a = 0 dan F(t) = 0 untuk semua t. Persamaan diferensial (1) kemudian direduksi menjadi :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{2}$$

Dimana m (> 0) adalah massa dan k (> 0) adalah konstanta pegas. Dibagi dengan m dan membiarkan $\frac{k}{m} = \lambda^2$, kita dapat menuliskannya sebagai:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0 \tag{3}$$

Persamaan karakteristik diperoleh :

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

Memiliki akar-akar $r = \pm\ \lambda i$ dan karenanya solusi umum dari (2), sehingga dapat ditulis menjadi :

$$x = c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t \tag{4}$$

Dimana c_1 dan c_2 berupa suatu konstanta.

Mari kita asumsikan bahwa massa awalnya dipindahkan sejauh x_0, dari posisi kesetimbangan dan dilepaskan dari titik awal dengan kecepatan awal v_0. Kemudian dijumlahkan persamaan diferensial (2) dan (3), kita akan memiliki kondisi awal, sebagai berikut :

$$x(0) = x_0 \tag{5}$$

$$x\text{'}\ (0) = v_0 \tag{6}$$

Turunan (4) terhadap t, kita mempunyai :

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \lambda \cos \lambda t - c_2 \lambda \sin \lambda t \tag{7}$$

Penerapan kondisi (5) dan (6) untuk persamaan (4) dan (7), masing-masing dapat kita lihat langsung sebagai berikut:

$$c_2 = x_0$$

$$c_1\ \lambda = v_0$$

Substitusi nilai c_1 dan c_2 jadi ditentukan untuk persamaan (4) memberikan solusi khusus untuk persamaan diferensial (2) yang memenuhi kondisi (5) dan (6) dalam bentuk :

$$x\ =\ \tfrac{v_0}{\lambda}\ \sin\ \lambda\ t\ +\ x_0\ \cos\ \lambda\ t$$

Kita dapat membuat alternatif dari persamaan diatas yang ditulis sebagai :

$$x = c \left(\frac{(v_0/\lambda)}{c} \sin \lambda t + \frac{x_0}{c} \cos \lambda t \right) \tag{8}$$

Dengan

$$c = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2 + (x_0)^2} > 0 \tag{9}$$

Kemudian, ambil :

$$\frac{(v_0/\lambda)}{c} = -\sin \phi \tag{10}$$

$$\frac{x_0}{c} = \cos\phi$$

Maka Persamaan (8) dapat menjadi :

$$x = c\cos(\lambda t + \phi) \tag{11}$$

Dimana c diberikan dari persamaan (9) dan ϕ ditentukan dari persamaan (10). Ketika $\lambda = \sqrt{k/m}$, maka dapat kita diperoleh bahwa solusi dari persamaan (11) dalam bentuk :

$$x = c\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \tag{12}$$

Kemudian memberikan perpindahan x sebagai massa dari kesetimbangan O sebagai fungsi dari waktu t (t > 0). Kita langsung melihat bahwa gerakan massa yang bebas dan tidak terkendali merupakan gerakan harmonik sederhana. Konstanta c disebut sebagai amplitudo gerakan dan memberikan perpindahan maksimum (positif) dari massa dari posisi setimbangnya. Gerakannya merupakan gerakan periodik dan massa berosilasi bolak-balik antara x = c dan x = -c. Kita memiliki x = c jika dan hanya jika :

$$\sqrt{\tfrac{k}{m}}t + \phi = \pm\, 2n\pi$$

n = 0, 1, 2, 3,. . . ; t > 0. Dengan demikian, perpindahan maksimum (positif) terjadi jika dan hanya jika :

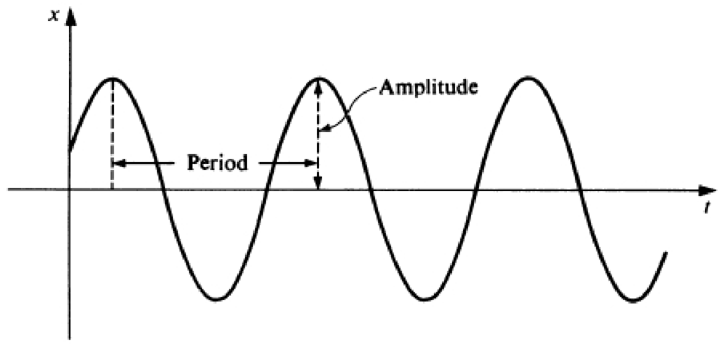
$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}(\pm 2n\pi - \phi) > 0 \tag{13}$$

Dimana n = 0, 1, 2, 3, ...

Interval waktu antara dua maxima berturut-turut disebut periode gerak. Menggunakan persamaan (13), kita dapat melihat bahwa diberikan

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{14}$$

Kebalikan dari periode, yang memberikan jumlah osilasi per detik disebut frekuensi alami (atau frekuensi) dari gerakan. Nilai dari ϕ disebut konstanta fase (atau sudut fase). Grafik dari gerak ini dapat ditunjukkan dalam gambar 1 sebagai berikut :



Gambar 1

3 Contoh Soal

Sebuah beban dengan berat 8-lb ditempatkan di bawah gulungan pegas yang digantung di langit-langit. Beban tersebut menjadi tenang pada titik kesetimbangan, sehingga pegas meregang sebesar 6 in. Lalu beban tersebut ditarik sebesar 3 in. Di bawah ini adalah posisi saat setimbang dan dilepaskan saat t = 0 dengan kecepatan awal 1 ft/sec, ke arah bawah. Abaikan hambatan pada media perantara dan asumsikan bahwa tidak ada gaya dari luar. Tentukan amplitudo, periode dan frekuensi dari gerak yang dihasilkan!

Rumus. Berikut adalah contoh yang bebas, gerak tak teredam dan karenanya persamaan (5.8) berlaku. Karena beban seberat 8-lb meregangkan pegas sebesar 6 in = $\frac{1}{2}$ ft. Hukum Hooke's $F = ks$, diberikan $8 = k\frac{1}{2}$ dan maka k = 16 lb/ft. Juga, $m = \frac{w}{g} = \frac{8}{32}$ (bergerak pelan) lalu persamaan (2) diberikan sebagai berikut :

$$\tfrac{8}{32}\tfrac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \tag{15}$$

Karena beban tersebut dilepaskan ke bawah kecepatan awal 1 ft/sec dari titik 3 in (= $\frac{1}{4}$ ft) dibawah ini adalah posisi setimbang, kita juga mempunyai keadaan awal yaitu :

$$x(0) = \tfrac{1}{4}$$

$$x'(0) = 1 \tag{16}$$

Solusi. Persamaan karakteristik yang sesuai dengan persamaan (15) adalah r^2 $+ 64 = 0$, sehingga $r = \pm\ 8i$. Jadi solusi umum dari persamaan diferensial (15) dapat ditulis sebagai berikut :

$$x = c_1 \sin 8t + c_2 \cos 8t \tag{17}$$

Dimana c_1 dan c_2 adalah konstan. Berlaku kondisi pertama (16) , kita temukan $c_2 = \frac{1}{4}$ Turunkan persamaan (17) maka diperoleh :

$$\tfrac{dx}{dt} = 8\ c_1\ \cos\ 8t\ \text{-}\ 8\ c_2\ \sin 8t$$

Menggunakan kondisi kedua (16), kita dapatkan $8c_1 = 1$ maka $c_1 = \frac{1}{8}$ Dengan demikian, solusi dari PD (15) berdasarkan kondisi (16) adalah

$$x = \frac{1}{8} \sin 8t + \frac{1}{4} \cos 8t \tag{18}$$

Mari kita substitusikan ke dalam rumus pada persamaan (12), kita dapatkan yaitu :

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{8}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{5}}{8}$$

Dan dapat ditulis sebagai :

$$x = \tfrac{\sqrt{5}}{8}\ (\tfrac{\sqrt{5}}{5}\ \sin\ 8t\ +\ \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\ \cos\ 8t)$$

Jadi,

$$\cos\phi = \frac{2\sqrt{5}}{5} \tag{19}$$

$$\sin\ \phi = \text{-}\tfrac{\sqrt{5}}{5}$$

Kita tuliskan solusi (18) ke dalam rumus :

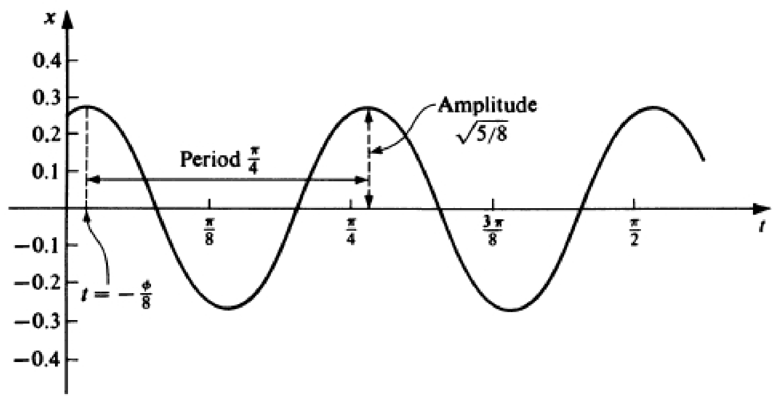
$$x = \frac{\sqrt{5}}{8} \cos{(8t + \phi)} \tag{20}$$

Dimana ϕ didefinisikan oleh persamaan (17). Dari persamaan tersebut kita temukan bahwa $\phi \approx$ -0,46 radians. Ambil $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

Solusi persamaan (20) dengan demikian diberikan sebagai :

$$x = 0{,}280\ \cos\ (8t\ +\ 0{,}46)$$

Amplitudo dari gerakan $\frac{\sqrt{5}}{8} \approx 0{,}280$. Dengan rumus (14), periodenya $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ dan frekuensinya $\frac{4}{\pi}$ oscillations/sec. Grafik akan ditunjukkan pada gambar 2 sebagai berikut :



Gambar 2

Sebelum meninggalkan permasalahan ini, mari kita pastikan bahwa kita dapat mengatur kondisi awal dengan benar. Mari kita gantikan pernyataan ketiga pada kalimat yang ada pada masalah dengan mengikuti: "Beratnya kemudian didorong ke atas 4 in di atas kondisi setimbang dan dilepaskan saat t = 0, dengan kecepatan awal 2 ft/sec, diarahkan ke atas".

Kondisi awal pada persamaan (16) akan dapat digantikan dengan :

$$x\ (0) = -\tfrac{1}{3}$$

$$x'\ (0) = -2$$

Tanda negatif tersebut muncul sebelum $\frac{1}{3}$ karena posisi awal 4 in adalah $\frac{1}{3}$ ft diatas posisi setimbang dan karenanya bernilai negatif. Tanda negatif sebelum 2 karena fakta bahwa kecepatan awal bergerak naik, pada arah negatif.