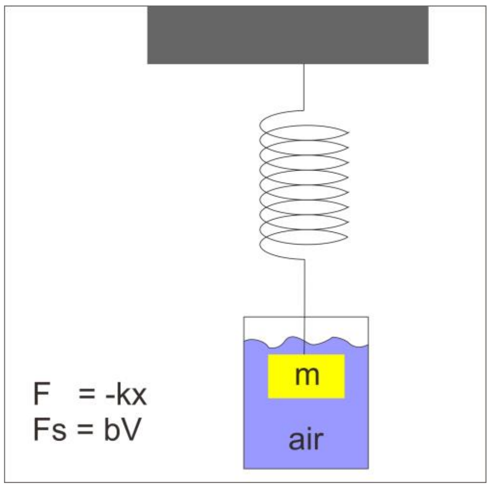
APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE II

GERAK BEBAS TEREDAM

Oleh : Dewi Oktaviani, Raihan Noor F., Nita Permatasari, Kurnia Damar P.

Sistem Gerak Bebas Teredam adalah sistem gerak dengan parameter Gaya Luar F(t)=0 dan Peredam d≠0**.** Untuk mengilustrasikan gerak benda pada sistem pegas bebas teredam pada ganbar seperti berikut :



Dari ilustrasi berikut, didapat :

$$\sum F = m.a$$

$$F - Fs = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx - bv = m\ \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0}\textbf{.....(1.1)}$$

Bagi kedua ruas PD (1.1) dengan m, maka didapatkan :

$$\frac{m}{m}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = 0$$

Misalkan $\frac{b}{m} = 2\lambda$ dan $\frac{k}{m} = \omega^2$. Sehingga, didapatkan :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \text{ .... (1.2)}$$

Persamaan karakteristik dari PD (1.2) yaitu :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0 \text{ .... (1.3)}$$

Dengan menggunakan rumus ABC, maka akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut diperoleh :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4(1)(\omega^2)}}{2(1)}$$

$$r_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega^2}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}{2}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \text{ ...(1.4)}$$

Untuk mengilustrasikan gerak benda pada sistem pegas bebas teredam pada bahasan berikut akan diuraikan tiga kasus, yaitu sistem terendam kurang (*damped, oscillatory motion*), sistem teredam kritis (*critically damping*), dan sistem teredam lebih (*overcritically damping*), dimana masing-masing ditentukan dari nilai diskriminan pada akar Persamaan Karakteristik.

1. **Sistem terendam kurang (*damped, oscillatory motion)***

Solusi persamaan gerak benda pada sistem teredam kurang (*damped, oscillatory motion)* didapatkan jika $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. sehingga akar-akar dari persamaan karakteristik (1.3) merupakan bilangan kompleks.

Persamaan (1.4), dapat diubah menjadi bentuk seperti berikut :

$$r = -\lambda \pm i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

Jadi, solusi umum dari PD (1.3) adalah

$$x = e^{-\lambda t}(c_1 sin\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + c_2 cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t)\backslash$$

Dengan $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} > 0$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = -sin\psi$$

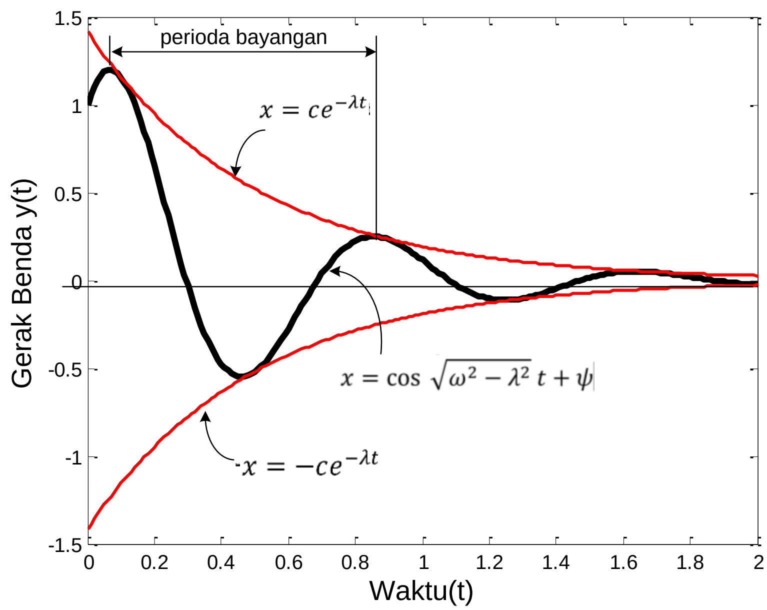
$$\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = cos\psi$$

Diperoleh bentuk baru dari solusi umum, yaitu

$$x = ce^{-\lambda t}(\cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \psi)$$

Dari solusi general tersebut, $ce^{-\lambda t}$ menunjukkan faktor peredamnya. Sedangkan $(\cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \psi)$ menjelaskan karakter osilasinya. Karakter osilasi tersebut menunjukkan gerak harmonik sederhana.

Gambar Osilasi pada Gerak Benda Bebas Teredam Kurang



2. Sistem teredam Kritis (critically damped)

Pada sistem teredam kritis $\lambda^2 = \omega^2$ sehingga akar-akar dari persamaan karakteristik (1.3) kembar yaitu:

$$r_{1,2} = \frac{-d}{2m}$$

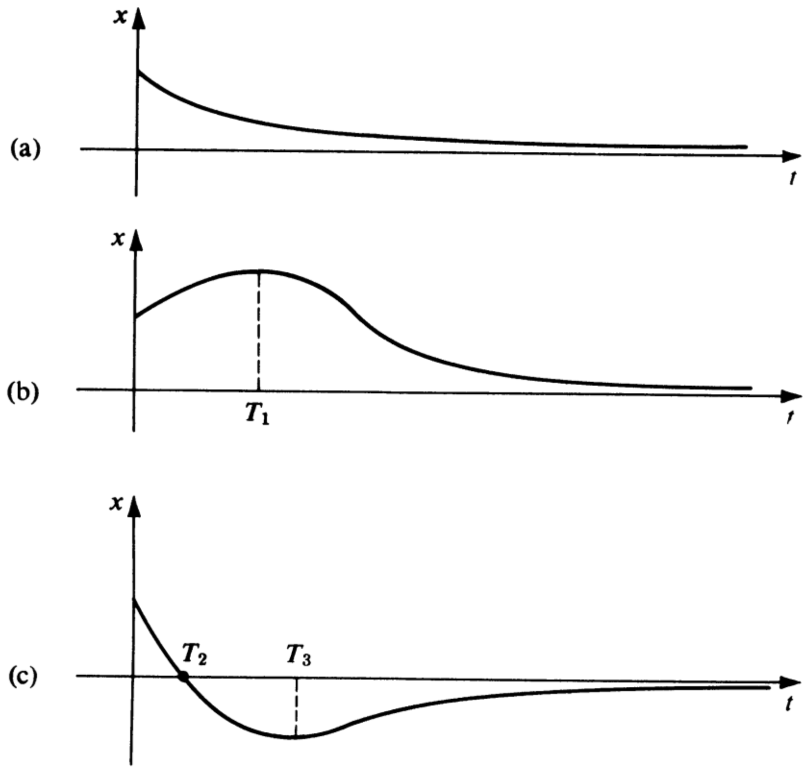
Persamaan solusinya :

$$\boldsymbol{x = (c_1 + c_2\ t)\ e^{(-\lambda)t}}$$

Redaman cukup berperan hebat dalam mencegah osilasi. Jika ada penurunan dalam jumlah redaman, maka akan mengubah situasi kembali ke kasus pertama, yaitu sistem terendam kurang. Sehingga, gerakan osilasi teredam akan terjadi. Kasus 2 maka adalah kasus batas, kasus ini dikatakan sebagai kasus teredam secara kritis.

Massa pada kasus ini cenderung ke posisi kesetimbangannya. tergantung pada kondisi awal yang ada, kemungkinan berikut dapat terjadi dalam gerakan ini:

a) Massa tidak melewati posisi kesetimbangannya. Massa hanya mendekati posisi keseimbangannya secara monoton.
b) Massa tidak melewati posisi kesetimbangannya, tetapi penampakkannya dari keseimbangan mencapai suatu ekstrem tunggal. Setelah perpindahan ekstrem ini terjadi, massa cenderung ke posisi setimbangnya secara monoton
c) Massa melewati posisi kesetimbangannya sekali dan kemudian mencapai perpindahan ekstrem. Setelah itu ia cenderung ke posisi ekuilibriumnya secara monoton pada t menuju tak hingga.



3. Sistem teredam lebih (*over critical damping*)

Pada sistem teredam lebih $\lambda > \omega$, yang berakibat $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. Dengan kata lain, akar-akar dari (1.3) berlaian.

Akar solusi dari PD (1.3) adalah

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Solusi umum dari PD (1.3) adalah

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

4. Soal

A 32-lb weight is attached to the lower end of a coil spring suspended from the ceiling. The weight comes to rest in its equilibrium position, thereby stretching the spring 2 ft. the weight is the pulled down 6 in, below its equilibrium position and releashed at t = 0. No external forces are present; but the resistance of medium in pounds is numerically equal to $4\frac{dx}{dt}$, where $\frac{dx}{dt}$ is the instantaneous velocity in feet per second.

A. Determine the resulting motion of weight on the spring.
B. Determine the motion of weight on the spring described if the resistance of the medium in pounds is numericaly to $8\frac{dx}{dt}$ instead of $4\frac{dx}{dt}$, all over the circumstances being the same as stated.
C. Determine the motion of weight on the spring described if the resistance of the medium in pounds is numericaly to $10\frac{dx}{dt}$ instead of $4\frac{dx}{dt}$, all over the circumstances being the same as stated.

Jawab

Diketahui : **Gerak bebas teredam**

$W = 32\ lb$ stretching the spring 2 ft. (berlaku Hukum Hooke)

The weight is then pulled down 6 in.

$x(0) = 6\ in. = \frac{1}{2} ft.$

$x'(0) = 0$

$k = \frac{32}{2} = 16\ lb/ft$

$m = \frac{W}{g} = \frac{32}{32} = 1$

(A) $b = 4$, (B) $b = 8$, (C) $b = 10$

a) Berdasarkan (1.1), diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

Persamaan karakteristiknya

$$r^2 + 4\mathrm{r} + 16 = 0$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.16}}{2}$$

$$r = -2 \pm 2\sqrt{3}i$$

Solusi umumnya adalah

$$x = e^{-2t}(c_1 \; \sin 2\sqrt{3}\, t + c_2 \cos 2\sqrt{3}\, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-2t}[(-2c_1 - 2\sqrt{3}c_2) \; \sin 2\sqrt{3}\, t + (2\sqrt{3}c_1 - 2c_2) \cos 2\sqrt{3}\, t]$$

Dari kondisi awal didapat

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3}c_1 - 2c_2 = 0$$

Jadi $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $c_2 = 1/2$

$$x = e^{-2t}(\frac{\sqrt{3}}{6} \; \sin 2\sqrt{3}\, t + c_2 \cos 2\sqrt{3}\, t)$$

Diperoleh bentuk baru dari solusi umum, yaitu

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-2t}(\cos(2\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6})$$

b) Berdasarkan (1.1), diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

Persamaan karakteristiknya

$$r^2 + 8\text{r} + 16 = 0$$

$$r_{1,2} = -4$$

Solusi umumnya adalah

$$x = \left(c_1 + c_2\, t\right)\, e^{-4t}$$

$$\frac{dx}{dt} = (c_2 - 4c_1 - 4c_2 t)e^{-4t}$$

Karena $x(0) = \frac{1}{2}$ dan $x'(0) = 0$, diperoleh $c_1 = \frac{1}{2}\, dan\, c_2 = 2$. Jadi

$$x = \left(\frac{1}{2} + 2t\right) e^{-4t}$$

c) Berdasarkan (1.1) diperoleh

$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 16x = 0$

Persamaan karakteristiknya

$$r^2 + 10\text{r} + 16 = 0$$

$$(r+2)(r+8) = 0$$

$$r = -2 \text{ atau } r = -8$$

Solusi umumnya adalah

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Dimana c_1 dan c_2 adalah konstan. Turunan solusi tersebut terhadap t :

$$\frac{dx}{dt} = -2c_1 e^{r_1 t} - 8c_2 e^{r_2 t}$$

Dengan mengaplikasikan initial condition, kita dapatkan

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{2}$$

$$-2c_1 - 8c_2 = 0$$

Dengan subtitusi eliminasi, kita dapat $c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = -\frac{1}{6}$. Sehingga, solusinya adalah :

$$x = \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-8t}$$

Sumber :

Ross. Shepley L.(1984). *Differensial Equations.* Kanada. John Wiley & Sons, Inc.