Aplikasi Persamaan Diferensial Orde 2

Forced Motion

May 10, 2019

Anggota kelompok :

1. Dilivia Primanita
2. Genta Maulana Mustofa
3. Nanda Riskiana Sari
4. Putri Dewi Ariska

1 Forced Motion

Forced motion atau dalam bahasa indonesia berarti Sistem gerak paksa adalah suatu kasus pada sistem pegas dengan menggunakan 4 buah gaya yang bekerja, yaitu gaya gravitasi, gaya pegas gaya redam serta gaya eksternal. Jika $F(t) \neq 0$ yang berarti gaya eksternal tidak diabaikan maka disebut sebagai sistem gerak paksa atau (Forced Motion).
Pada hal ini $F(t)$ didefinisikan oleh $F(t) = F_1 \cos \omega t, \forall t \geq 0$, dengan F_1dan ω adalah suatu konstanta.

Pertama, kita dapat membentuk persamaan diferensial bentuk umum dari

$$\sum F = ma$$

$$F_g + F_s + F_d + F_e = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

setelah kita melakukan penyederhanaan sistem dalam keadaan setimbang yaitu $mg = k\triangle L$, sehingga didapatkan persamaan

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + d\frac{dy}{dt} + ky = F_1 \cos \omega t$$

setelah itu bagi keedua ruas dengan m menghasilkan

$$\frac{a}{m} = 2b, \quad \frac{k}{m} = \lambda^2, \quad and \quad \frac{F_1}{m} = E_1$$

sehingga menghasilkan persamaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = E_1 \cos \omega t$$

dari persamaan tersebut kita dapat memperoleh nilai dari fungsi komplementernya adalah

$$x_c = ce^{-bt}cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}t + \phi)$$

selain menggunakan rumus diatas kita juga bisa menggunakan persamaan karakteristik, untuk penggunaannya tergantung pembaca lebih mudah menggunakan yang mana, serta bentuk persamaan yang diberikan juga memberikan pengaruh.

Untuk selanjutnya adalah mencari integral partikularnya atau biasa dikenal dengan x_p yaitu menggunakan metode koefisien tak tentu. Kita dapat

$$x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

dari bentuk awal ini kita lakukan penurunan sebanyak dua kali, lalu dilakukan subtitusi kedalam persamaan awal

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = E_1\cos\omega t$$

didapatkan nilai dari

$$A = \frac{E_1(\lambda^2 - \omega^2)}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}$$
$$B = \frac{2b\omega E_1}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}$$

jikia kita subtitusikan nilai dari A dan B pada persamaan x_p didapatkan persamaan

$$x_p = \frac{E_1}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}[(\lambda^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2b\omega\sin\omega t]$$

setelah itu dapat kita cari sudut fasenya menggunakan rumus dibawah ini

$$(\lambda^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2b\omega\sin\omega t = \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}\cos(\omega t - \theta),$$
$$dimana$$
$$cos\theta = \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$
$$sin\theta = \frac{2b\omega}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

maka didapat persamaan akhir x adalah

$$x = ce^{-bt}\cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}t + \phi) + \frac{E_1}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}\cos(\omega t - \theta)$$

dari bentuk ini kita dapat mengetahui bahwa suatu hal yaitu x_c biasa direpresentasikan sebagai bentuk sementara, yang mana kemungkinannya akan dapat diabaikan karena nilainya akan terus menerus turun dari waktu awal. sementara untuk x_p merupakan bentuk tetap yang koefisien dari cos merupakan amplitudo dengan periode π.