APLIKASI PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINEAR ORDE DUA

“MASALAH RANGKAIAN LISTRIK”

Oleh Mirna, Ghany, Rahma, Ninda, Miftah

Persamaan differensial orde dua adalah persamaan yang melibatkan x,y dan turunan-turunan y dengan yang paling tinggi adalah turunan kedua. Persamaan differensial orde dua memiliki bentuk linear. Bentuk umum dari persamaan differensial linear dapat dituliskan sebagai

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x)\ \text{dengan}\ a_0(x)\neq 0$$

Dalam kehidupan sehari-hari persamaan differensial linear orde dua dapat diaplikasikan dalam berbagai hal, salah satunya adalah pada masalah rangkaian listrik. Masalah rangkaian listrik yang akan dibahas berikut adalah rangkaian listrik seri. Rangkaian listrik seri memuat *electromotive force, resistor, inductor* dan *capasitor.*

Electromotive force atau yang disebut juga sebagai EMF Counter merupakan gaya gerak listrik (GGL) yang timbul pada ujung-ujung penghantar karena adanya perubahan magnetik yang dihasilkan oleh gerakkan kawat penghantar yang memotong arah arus medan magnetik. *Electromotive force* disimbolkan dengan “E” dengan satuan Volt.

Resistor merupakan komponen elektronik yang untuk mengatur tegangan listrik dan arus listrik. *Resistor* berfungsi untuk menghambat dan membatasi aliran listrik yang mengalir dalam suatu rangkaian elektrinoka. Resistor disimbolkan dengan “R” dengan satuan ohm (Ω).

Inductor adalah komponen elektronika yang berfungsi untuk menghasilkan medan magnet, tegangan induksi atau arus induksi. *Inductor* disimbolkan dengan “L” dengan satuan henry (H).

Capasitor atau yang sering disebut kondensator merupakan alat yang dapat menyimpan energi didalam medan listrik dengan cara mengumpulkan ketidakseimbangan internal dari muatan listrik. *Capasitor* disimbolkan dengan “C” dengan satuan farad.

Electromotive force menghasilkan aliran arus disirkuit tertutup dan menghasilkan tegangan yang disebut drop disetiap resistor, induktor dan kapasitor. Dalam rangkaian listrik berlaku hukum :

1. Tegangan jatuh di resistor, diberikan oleh:

$$E_R = Ri \qquad (i)$$

Dengan R adalah proporsional konstan yang disebut resistance dan i adalah arus dengan satuan ampere.

2. Tegangan jatuh di sebuah induktor, diberikan oleh:

$$E_L = L\frac{di}{dt} \qquad \text{(ii)}$$

Dengan L adalah proporsional konstan yang disebut induksi dan i adalah arus.

3. Penurunan tegangan di kapasitor yang diberikan oleh:

$$E_C = \frac{1}{C}q \qquad \text{(iii)}$$

Dengan C adalah proporsional konstan yang disebut kapasitas dan q adalah muatan dengan satuan coulomb. Untuk $i = \frac{dq}{dt}\,(iv)$ diperoleh

$$dq = i\,dt$$

$$\int dq = \int i\,dt$$

$$q = \int i\,dt$$

Sehingga didapat :

$$E_C = \frac{1}{C}\int i\,dt\,.$$

Selain 3 hukum tersebut terdapat hukum yang sangat fundamental yang berlaku dalam rangkaian listrik yaitu hukum Kirchhoff sebagai berikut:

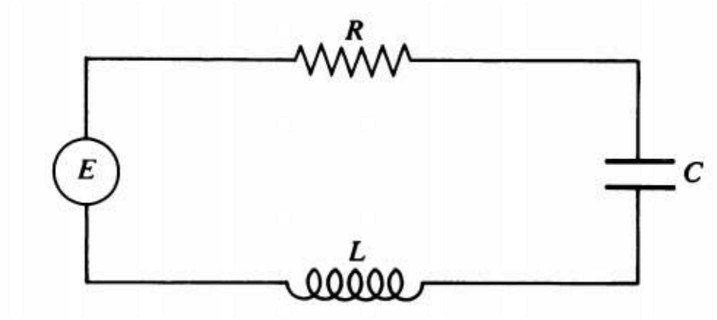
1. Hukum Tegangan Kirchhoff (1)

Jumlah total tegangan pada suatu rangkaian tertutup adalah 0

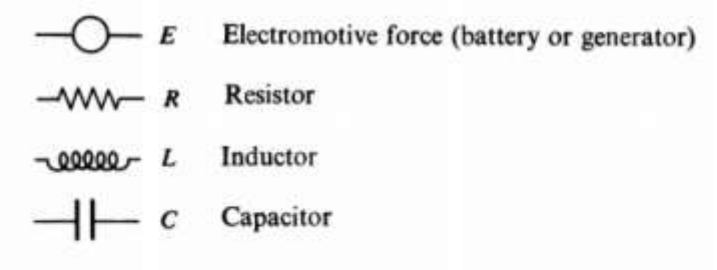
2. Hukum Tegangan Kirchhoff (2)

Jumlah tegangan jatuh di resistor, induktor, dan kapasitor adalah sama dengan GGL total dalam rangkaian tertutup.

Perhatikan gambar berikut:



Keterangan :



Untuk menerapkan hukum Kirchhoff digunakan persamaan (i), (ii) dan (iii) didapatkan:

$$E_L + E_R + E_C = E$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E \qquad (v)$$

Persamaan (v) belum berbentuk persamaan differensial yang kita inginkan karena masih memuat dua variable dependent yaitu variabel q dan i. Maka perlu dinyatakan dalam satu variabel dengan menggunakan persamaan (iv) sehingga diperoleh:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \quad \text{(vi)}$$

Persamaan (vi) ini sudah berbentuk persamaan differensial linear orde 2 dengan q sebagai variabel dependent. Selain itu, jika kita menurunkan persamaan (v) terhadap t dan menggunakan persamaan (iv), q dapat dieliminasi dari persamaan (v) sehingga diperoleh:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt} \quad \text{(vii)}$$

Persamaan (vii) ini sudah berbentuk persamaan differensial linear orde 2 dengan i sebagai variabel dependent.

Jadi kita memiliki dua persamaan differensial linear orde dua yaitu persamaan (vi) dan (vii) untuk menentukan nilai q dan i.

Untuk kasus yang lebih sederhana, dapat diselesaikan dengan mereduksi persamaan menjadi persamaan differensial orde satu, misal:

1. Rangkaian tidak memiliki kapasitor

   Persamaan (v) dapat direduksi menjadi :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

2. Rangkaian tidak memiliki induktor

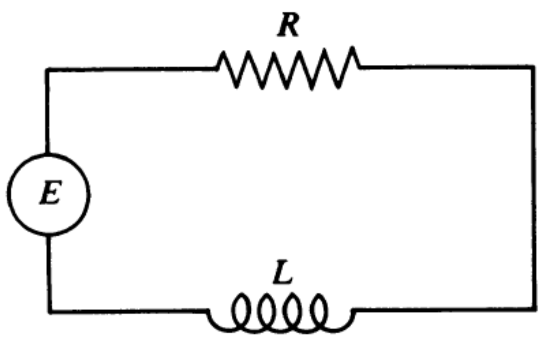
   Persamaan (vi) dapat direduksi menjadi:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E$$

Contoh :

Sebuah rangkaian seri memiliki eletromotive force yaitu E = 100 sin 40t V. Resistor 10 Ω. Induktor 0,5 H jika arus awal adalah 0. Tentukan arus saat t > 0!

Jawab :



Menggunakan Hukum 1 dan 2, dimana

1. $E_R = Ri = 10i$

2. $E_L = L\frac{di}{dt} = \frac{1}{2}\frac{di}{dt}$

Aplikasikan ke Hukum Kirchhoff pada persamaan differensial tersebut

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 100\sin 40t$$

Atau

$$\frac{di}{dt} + 20i = 200\sin 40t \qquad (viii)$$

Ketika arus awalnya = 0, maka

$$i_0 = 0 \qquad (ix)$$

Solusi dari persamaan (viii) adalah persamaan linear orde 1. Dan faktor integrasinya yaitu$e^{\int 20\, dt} = e^{20\, t}$

Kalikan persamaan (viii) dengan faktor integrasi

$$e^{20\,t}\frac{di}{dt} + e^{20\,t}20i = e^{20\,t}200\sin 40t$$

Atau

$$\frac{d}{dt}(e^{20\,t}i) = 200e^{20\,t}\sin 40t$$

Integralkan kedua ruas, sehingga didapat

$$i = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + Ce^{-20t}$$

Subsitusi ke persamaan (ix), $i = 0$ ketika $t = 0$ maka $C = 4$

Maka solusinya

$$i = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + 4e^{-20t}$$

Dan dapat diubah ke bentuk trigonometri dalam bentuk sudut fase, didapat

$$i = 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 40t - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 40t\right) + \ 4e^{-20t}$$

Atau

$$i = 2\sqrt{5}\sin(40t + \phi) + \ 4e^{-20t}$$

Dimana

$$\phi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$\phi \approx -1.11\ rad,$ maka

$$i = 2\sqrt{5}\sin(40t - 1.11) + \ 4e^{-20t}$$

Jadi, arus saat t > 0 adalah memenuhi persamaan

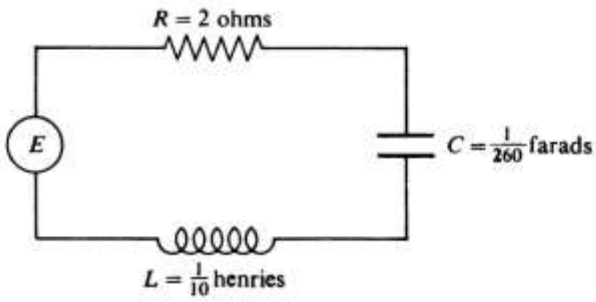
$$i = 2\sqrt{5}\sin(40t - 1.11) + 4e^{-20t}$$

Contoh 2

Rangkaian seri memiliki GGL $E = 100 \sin 60t\ V$ resistor = 2Ω

Induktor =0,1 H. Kapasitor = $\frac{1}{260} Farads$. Jika arus awal dan muatan awal pada kapasitor sama dengan 0, tentukan muatan pada kapasitor ketika waktu t >0.

Jawab :



Menggunakan Hukum Kirchhoff, misalkan i adalah arus dan q adalah muatan pada kapasitor ketika waktu t. GGL total $= 100 \sin 60t\ V$. Gunakan hukum tegangan turun 1, 2, 3 maka didapat

1. Resistor : $E_R = Ri = 2\text{i}$
2. Induktor : $E_L = L\frac{di}{dt} = \frac{1}{10}\frac{di}{dt}$
3. Kapasitor : $E_C = \frac{1}{C}q = 260\ \text{q}$

   Kemudian gunakan Hukum Kirchhoff, didapat

$$E_L + E_R + E_C = E$$

$$\frac{1}{10}\frac{di}{dt} + 2i + 206q = 100 \sin 60t$$

Karena $i = \frac{dq}{dt}$ kemudian substitusi ke persamaan diatas, didapat

$$\frac{1}{10}\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{2dq}{dt} + 260q = 100 \sin 60t \qquad (x)$$

Kedua ruas dikali dengan 10

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{20dq}{dt} + 2600q = 1000 \sin 60t \qquad (xi)$$

Karena $q\ awal = 0$ maka dapat ditulis $q_0 = 0$

Karena $i\ awal = 0$ dan $i = \frac{dq}{dt}$ maka dapat ditulis $q'_0 = 0$

Dari persamaan xi diubah menjadi persamaan homogen, sehingga persamaan karakteristiknya yaitu

$$r^2 + 20r + 2600 = 0$$

Didapat akar-akar persamaan tersebut -10 ± 50i, maka solusi komplementernya yaitu

$$q_c = e^{-10t}(c_1 \sin 50t + c_2 \cos 50t) \quad (xii)$$

Solusi khusus $q_p = A \sin 60t + B \cos 60t \quad (xiii)$

Cari turunan pertama dan turunan kedua pada persamaan xiii, yaitu

$$q'_p = 60A \cos 60t - 60B \sin 60t$$

$$q''_p = -3600A \sin 60t - 3600B \cos 60t$$

Substitusikan q'_p dan q''_p ke persamaan xi, maka didapat

$A = -\frac{25}{61}$ dan $B = -\frac{30}{61}$

Maka solusi khususnya yaitu

$$q_p = -\frac{25}{61} \sin 60t - \frac{30}{61} \cos 60t$$

Sehingga solusi umumnya yaitu

$$q = e^{-10t}(c_1 \sin 50t + c_2 \cos 50t) - \frac{25}{61} \sin 60t - \frac{30}{61} \cos 60t \quad (xiv)$$

Turunkan persamaan xiv

$$\frac{dq}{dt} = e^{-10t}[(-10c_1 - 50c_2) \sin 50t + (50c_1 - 10c_2) \cos 50t] - \frac{1500}{61} \cos 60t + \frac{1800}{61} \sin 60t \quad (xv)$$

Substitusi $q_0 = 0$ kepersamaan xiv dan $q'_0 = 0$ ke persamaan xv

Maka didapat

$c_2 - \frac{30}{61} = 0$ dan $50c_1 - 10c_2 - \frac{1500}{61} = 0$

Dari persamaan tersebut kita dapat

$c_1 = \frac{36}{61}$ dan $c_2 = \frac{30}{61}$

Maka solusinya didapat

$$q = \frac{6e^{-10t}}{61}(6 \sin 50t + 5 \cos 50t) - \frac{5}{61}(5 \sin 60t + 6 \cos 60t)$$

Atau

$$q = \frac{6\sqrt{61}}{61} e^{-10t} \cos(50t - \phi) - \frac{5\sqrt{61}}{61} \cos(60t - \theta)$$

Dimana cos $\phi = \frac{5}{\sqrt{61}}$, $\sin\phi = \frac{6}{\sqrt{61}}$ $dan \cos\theta = \frac{6}{\sqrt{61}}, \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{61}}$

Dari persamaan tersebut kita dapat $\phi \approx 0{,}88\, rad\ dan\ \theta \approx 0{,}69\, rad$. Sehingga, solusi yang kita dapatkan yaitu

$$q = 0{,}77e^{-10t} \cos(50t - 0{,}88) - 0{,}64 \cos(60t - 0{,}69)$$

Jadi muatan pada kapasitor ketika waktu t >0 akan memenuhi persamaan

$$q = 0{,}77e^{-10t} \cos(50t - 0{,}88) - 0{,}64 \cos(60t - 0{,}69)$$

Sumber :

Ross, Shepley L. (1984). *Differential Equation Edisi Third*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.