MATERI KULIAH

PENGANTAR PROSES STOKASTIK

2016

I Gusti Ayu Made Srinadi, S.Si.,M.Si.

JURUSAN MATEMATIKA Universitas Udayana

KATA PENGANTAR

Mata Kuliah Pengantar Proses Stokastik dengan kode mata kuliah MA593430/3(3–0) merupakan mata kuliah wajib di Jurusan Matemática FMIPA, Unud sehingga seluruh mahasiswa wajib mengambilnya. Matakuliah ini menetapkan tujuan akhir kemampuan membuat penilaian terhadap pemodelan stokastik. Perkuliahan dimulai dengan pengulasan kembali dan pendalaman materi konsep peluang dan peubah acak, kemudian dilanjutkan dengan pembahasan tentang proses stokastik dan spesifikasinya. Selanjutnya diberikan pembahasan tentang rantai Markov, proses Poisson, serta proses kelahiran dan kematian.

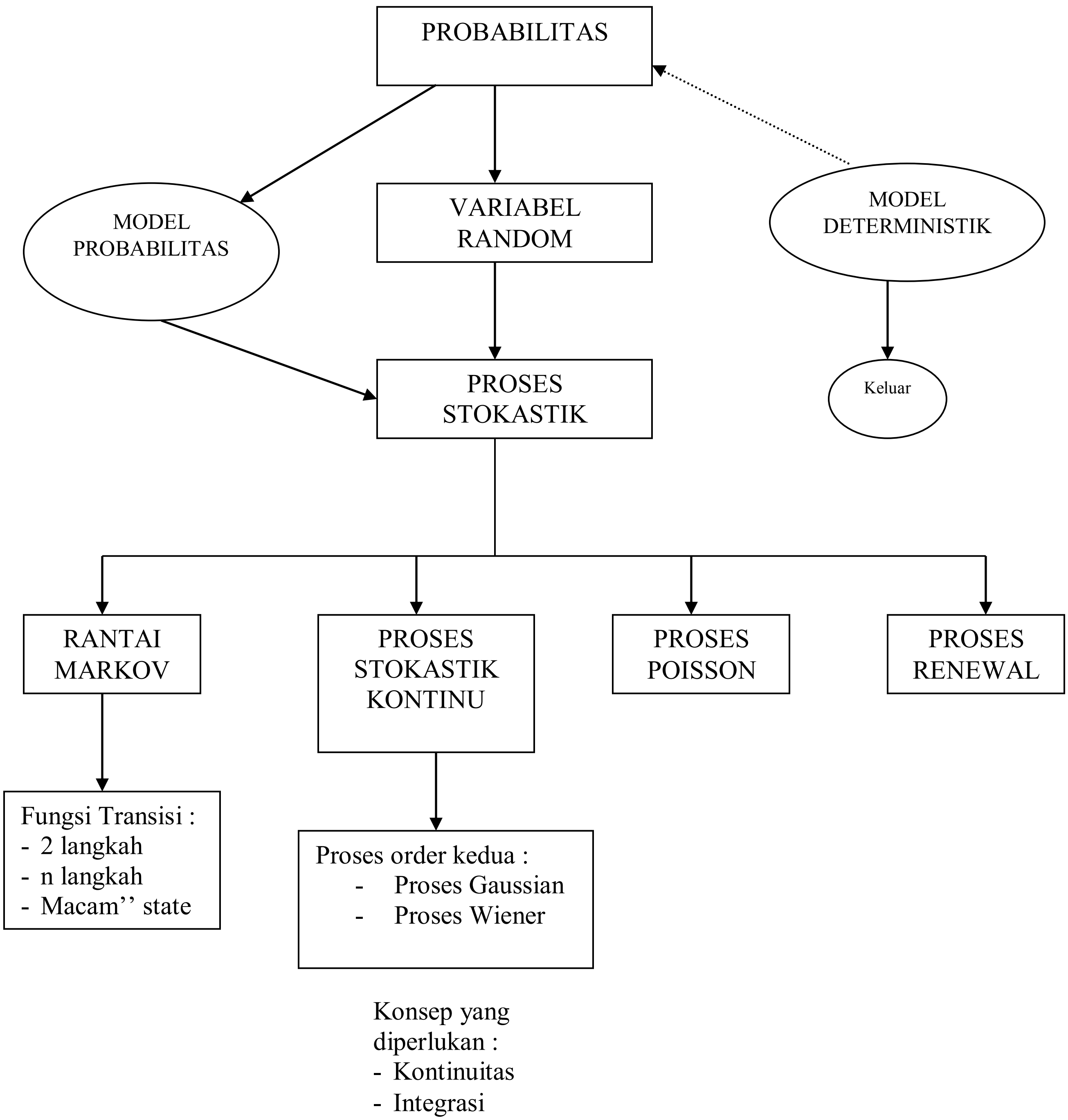
Setelah mengikuti kuliah Pengantar Proses Stokastik dalam proses pembelajaran selama satu semester berupa teori dan latihan, mahasiswa S1 PS. Matematika FMIPA UNUD mampu menciptakan model stokastik. Untuk membantu mahasiswa mencapai sasaran pembelajaran yang diharapkan, maka disusunlah modul kuliah "Pengantar Proses Stokastik" ini.

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, berkat rahmat-Nya modul ini tersusun, meskipun masih jauh dari sempurna,dan pada kesempatan berikutnya akan terus disempurnakan.

Kritik dan saran sangat penulis harapkan, demi penyempurnaan modul kuliah ini, atas bantuan dan kerjasama yang baik penulis ucapkan banyak terima kasih. Semoga modul ini bermanfaat bagi kita semua.

Penulis,

DAFTAR ISI


PROBABILITAS
MODEL PROBABILITAS
VARIABEL RANDOM
MODEL DETERMINISTIK
PROSES STOKASTIK
Keluar
RANTAI MARKOV
PROSES STOKASTIK KONTINU
PROSES POISSON
PROSES RENEWAL
Fungsi Transisi :
- 2 langkah
- n langkah
- Macam'' state
Proses order kedua :
- Proses Gaussian
- Proses Wiener
Konsep yang diperlukan :
- Kontinuitas
- Integrasi

BAB I
REVIEW BEBERAPA KONSEP PROBABILITAS & VARIABEL RANDOM
(Peluang & Peubah Acak)

Kompetensi Dasar : Mahasiswa mengingat dan menguasai konsep peluang dan peubah acak diskret maupun kontinu yang banyak digunakan dalam proses stokastik.

Tujuan Pembelajaran :

1. Mengingat kembali konsep peluang, terutama peluang bersyarat pada peubah acak diskret dan peubah acak kontinu.
2. Mengingat kembali penentuan nilai harapan dari peubah acak diskret dan kontinu.
3. Mengingat sifat-sifat nilai harapan dan ragam suatu peubah acak.

Percobaan Random adalah percobaan yang kemungkinan hasilnya dapat diterka tetapi tidak dapat diketahui dengan pasti kemungkinan mana yang terjadi (muncul). Experimen merupakan percobaan yang dapat diulang dengan kondisi yang sama, sedangkan hasilnya belum tentu sama. Misal : satu uang dilempar sekali, satu dadu dilempar dua kali, dua mata uang dilempar sekali, dan lain-lain.

Ruang sample suatu experiment ialah himpunan semua hasil experiment yang mungkin. Ruang sample sering disebut Space / State Space (S atau Ω). Kejadian /Event (E) merupakan himpunan bagian dari Ω ($E \subset \Omega$)

1.1. Probabilitas

1.1.1. Definisi Probabilitas

Probabilitas merupakan satu alat yang sangat fundamental untuk mengembangkan proses stokastik, baik teori maupun aplikasi model-model stokastik pada berbagai bidang ilmu. Berdasarkan perkembangannya, secara formal probabilitas didefinisikan dalam berbagai cara meliputi :

a. Definisi secara klasik (Prior)

   Jika suatu percobaan random dapat memberikan n hasil mutually exclusive (saling asing) dan n(A) menyatakan hasil yang diakibatkan oleh suatu atribut (kejadian) A, maka menurut definisi probabilitas klasik, probabilitas A didefinisikan sebagai bilangan pecahan, $P(A) = \frac{n(A)}{n}$

b. Definisi Frekuensi (Posterior)

Salah satu kelemahan probabiltas klasik adalah pada kejadian yang menghasilkan suatu hasil yang infinit. Dalam keadaan demikian, orang sering memandang probabilitas dengan memperhatikan harapan frekuensi relative dalam jangka panjang.

Contoh :

Pandang suatu percobaan melemparkan sebuah dadu sebanyak 300 kali. Hasil percobaan ini disajikan dalam tabel berikut :

Tabel 1. Hasil Pelemparan Sebuah dadu 300 kali

Hasil	Frekuensi	Frekuensi Relatif	Harapan Frekuensi Jangka Panjang
1	51	0,170	0,1667
2	54	0,180	0,1667
3	48	0,160	0,1667
4	51	0,170	0,1667
5	49	0,163	0,1667
6	47	0,157	0,1667
Total	300	1,000	1,000

Perhatikan bahwa, jika A suatu kejadian dalam percobaan random, maka probabilitas A diberikan oleh :

$$P(A) = \operatorname*{limit}_{n \to \infty} \left(\frac{n(A)}{n} \right)$$

c. Definisi Subjektif

Dalam beberapa perilaku kehidupan, kadang-kadang kita mendengar atau membuat pernyataan seperti :

- Berapa probabilitas PD ke-3 akan terjadi pada akhir tahun ini?
- Berapa probabilitas bahwa istri/pacar saya mencintai saya?
- Berapa probabilitas bahwa Si-A akan pulang ke rumah sekarang?

Dari pertanyaan-pertanyaan tersebut mungkin setiap orang yang kita tanyakan akan mempunyai jawaban yang berbeda-beda. Si-A mungkin mengatakan bahwa probabilitas akan terjadinya PD ke-3 pada akhir tahun ini adalah 0,01; si B mengatakan 0,02; si C mengatakan 0,08 dan seterusnya. Probabilitas yang disebutkan tersebut disebut Probabilitas Subjektif.

d. Definisi Axiomatis

Probabilitas klasik maupun frekuensi memerlukan suatu syarat percobaan dengan hasil yang terjadi berdasarkan syarat uniform. Pada sisi lain, mungkin kita sulit memperoleh syarat itu. Untuk tujuan tersebut perlu didefinisikan probabilitas yang dapat menggambarkan sifat-sifat esensial probabilitas yang disebutkan sebelumnya. Definisi probabilitas yang dimaksud adalah probabilitas axiomatik. Probabilitas ini pertama kali dikenalkan oleh Kolmogorov pada tahun 1933.

Sebelum mendefinisikan probabilitas axiomatic, yang pada dasarnya berhubungan secara langsung dengan teori ukuran dalam analisis real, sangat beralasan jika pertama kali kita mendefinisikan suatu konsep penting yaitu FIELD dan σ-FIELD.

DEFINISI
Suatu himpunan F dikatakan suatu Field (Aljabar) jika :
(i) $\Omega \in F$
(ii) $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
(iii) $A_1, A_2 \in F \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in F$

DEFINISI
Suatu himpunan F dikatakan suatu σ-Field (σ-Aljabar) jika :
(i) $\Omega \in F$
(ii) $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
(iii) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in F \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in F$

Dalam mendefinisikan probabilitas axiomatik, kita akan membatasi diri pada himpunan Field atau σ-field, khususnya Borel-Field. (Field dengan elemen bernilai real)

DEFINISI
Suatu ukuran probabilitas P adalah suatu fungsi himpunan yang didefinisikan pada σ-field F :

$P : F \rightarrow R$

dan memenuhi:
(i) P non negative, yaitu $P(A) \geq 0, \forall_{A \in F}$
(ii) P normed, yaitu $P(\Omega) = 1$
(iii) P adalah σ-aditif, yaitu :

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n \in F$ dan $A_i \cap A_j = \phi$ untuk $i \neq j$ maka $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$

Berdasarkan definisi ini kita akan dapat melihat sifat-sifat P, yaitu :
1. $P(\phi) = 0$
2. $P(A) = 1 - P(A^c), \forall_{A \in F}$

3. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \le P(A_2)$ (tidak turun)
4. σ-finite, yaitu $A_j \in F$, j = 1, 2, …, n dengan $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$ (kejadian saling lepas/ saling asing) maka :

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $\forall_{A,B \in F}$
6. Sub-aditif, yaitu :

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \text{ dan} \\ P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} P(A_j),\ \forall_{A_j \in F} \end{array}\right\} \text{Ketidaksamaan Boole}$$

Salah satu sifat yang sangat penting juga sebagai berikut:
Jika $\{A_n\}$ suatu barisan kejadian dengan A_n monoton naik ($A_n \uparrow$) atau A_n monoton turun ($A_n \downarrow$) maka :

$$P\left(\operatorname*{limit}_{n\to\infty} A_n\right) = \operatorname*{limit}_{n\to\infty} P(A_n)$$

Suatu barisan A_n dikatakan monoton naik jika $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$. Sebaliknya A_n dikatakan monoton turun jika $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$.

Selanjutnya, jika $A_n \uparrow$ maka $\operatorname*{limit}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan jika $A_n \downarrow$ maka $\operatorname*{limit}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

1.1.2. Probabilitas Bersyarat

DEFINISI
Jika $A \in F$ sedemikian hingga $P(A) > 0$, maka probabilitas bersyarat (*Conditional Probability*) $B \in F$ diberikan A, ditulis dengan $P(B \mid A)$ didefinisikan sebagai :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)};\ \forall_{B \in F}$$

Pada kenyataannya $P(B|A)$ adalah suatu ukuran probabilitas, karena :

(i) $P(B|A) \ge 0$; $\forall_{B \in F}$

(ii) $P(\Omega \mid A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

(iii) Jika $A_j \in F$, j = 1, 2, … dengan $A_i \cap A_j = \phi$; $i \neq j$ maka

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \mid A\right) = \frac{P\left[\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap A\right]}{P(A)}$$

$$= \frac{P\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A_j \cap A\right)\right]}{P(A)}$$

$$= \frac{1}{P(A)} \sum_{j=1}^{\infty} P\left(A_j \cap A\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P\left(A_j \cap A\right)}{P(A)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \mid A)$$

Selanjutnya misalkan A_1, A_2, …$\in$ F sehingga $A_i \cap A_j = \phi$; i $\neq$ j dan $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$, kita katakana bahwa A_1, A_2, … merupakan partisi dari Ω.

Untuk sembarang B$\in$F kita peroleh :

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(B \cap A_j\right)$$

Jadi $\quad P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(B \cap A_j\right)$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P\left(B \mid A_j\right).P(A_j)$$; untuk $P(A_j) > 0$, $\forall_{j=1,2,\dots}$

TEOREMA (Probabilitas Total)

Jika {Aj, j =1, 2, …} suatu partisi dari Ω dengan $P(A_j) > 0, \forall_j$ maka untuk B $\in$ F didapat :

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(B \mid A_j\right).P(A_j)$$

Teorema di atas pada dasarnya dapat digunakan untuk menghitung $P(A_j|B)$. Untuk setiap j = 1, 2, … pada kenyataannya :

$$P(A_j \mid B) = \frac{P\left(A_j \cap B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B \mid A_j).P(A_j)}$$

Berdasarkan uraian di atas, kita mempunyai teorema berikut :

TEOREMA (Teorema Bayes)

Jika {Aj, j =1, 2, …} suatu partisi dari Ω dengan P(A_j) > 0, dan jika P(B) > 0 maka:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{\sum_{j=1} P(B \mid A_j).P(A_j)}$$

Contoh :

Tiga anggota suatu koperasi dicalonkan menjadi ketua. Probabilitas Ali terpilih 0,3; probabilitas Badu terpilih 0,5; sedang probabilitas Cokro terpilih 0,2. Jika Ali terpilih, maka peluang kenaikan iuran koperasi 0,8; jika Badu terpilih, peluang kenaikan iuran 0,1 dan jika Cokro terpilih, peluang kenaikan iuran aalah 0,4. Bila seseorang merencanakan masuk menjadi anggota koperasi, tetapi menundanya beberapa minggu dan kemudian beberapa minggu dan mengetahui bahwa iuran telah nailk. Tentukan peluang bahwa Cokro terpilih jadi ketua?

Berdasarkan persoalan ini, misalkan :

A_1 : Ali yang terpilih

A_2 : Badu yang terpilih

A_3 : Cokro yang terpilih

B : orang yang menaikkan iuran

Maka :

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_3 \cap B)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j \cap B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_3).P(A_3)}{P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + P(B \mid A_3).P(A_3)}$$

$$= \frac{(0{,}4)(0{,}2)}{(0{,}8)(0{,}3) + (0{,}1)(0{,}5) + (0{,}4)(0{,}2)}$$

$$= \frac{0{,}08}{0{,}24 + 0{,}05 + 0{,}08} = \frac{0{,}08}{0{,}37} = \frac{8}{37}$$

1.2. Variabel Random

Untuk mempelajari proses stokastik diperlukan suatu pengertian dan konsep tentang variable random.

1.2.1.Definisi, Ekspektasi dan Variansi Sebuah Variabel Random

Misalkan (Ω, F) suatu ruang sampel. Suatu fungsi bernilai tunggal dari Ω ke R (bilangan real) dinamakan variabel random jika bayangan invers di bawah X dari semua himpunan-himpunan Borel di dalam R adalah *event* (kejadian), yaitu :

$X^{-1}(B) = \{w \,;\, X(w) \in B\} \in F$ untuk semua $B \in \mathcal{B}$

Berdasarkan definisi di atas, untuk $x \in R$ dan karena interval $(-\infty, x] \in \mathcal{B}$ maka X adalah suatu variabel random jika $X^{-1}(-\infty, x] = \{X(w) \leq x\}$merupakan kejadian di dalam F. Akibatnya kita mempunyai teorema berikut :

TEOREMA

X adalah suatu variabel random jika dan hanya jika untuk setiap $x \in R$

$\{w \,;\, X(w) \leq x\} = \{X \leq x\} \in F$

Contoh

Misalkan himpunan $A \subseteq \Omega$, didefinisikan fungsi indikator :

$$I_A(w) = \begin{cases} 0 & ;\, w \neq A \\ 1 & ;\, w \in A \end{cases}$$

Merupakan suatu variabel random. Misalkan B himpunan Borel ($B \in \mathcal{B}$), ada beberapa kemungkinan:

(i) $0 \notin B$ dan $1 \notin B$ maka $I_A^{-1}(B) = \phi$

(ii) $0 \in B$ dan $1 \notin B$ maka $I_A^{-1}(B) = A^c$

(iii) $0 \notin B$ dan $1 \in B$ maka $I_A^{-1}(B) = A$

(iv) $0 \in B$ dan $1 \in B$ maka $I_A^{-1}(B) = A \cup A^c = \Omega$

Jadi $I_A^{-1}(B) = \begin{cases} \Phi & ;\, 0 \notin B, 1 \notin B \\ A^c & ;\, 0 \in B, 1 \notin B \\ A & ;\, 0 \notin B, 1 \in B \\ \Omega & ;\, 0 \in B, 1 \in B \end{cases}$ atau $I_A^{-1}(B) = \{\phi, A^c, A, \Omega\} \in F$

Contoh :

Pada pelemparan dua keping mata uang satu kali, mata uang memiliki sisi H (angka) dan T (gambar) maka Ω = {HH, HT, TH, TT}. F adalah himpunan semua subset dari Ω. Didefinisikan X sebagai X(w) adalah banyaknya H dalam w, sehingga :

X(HH) = 2; X(HT) = X(TH) = 1; X(TT) = 0

Jadi :

$$X^{-1}(-\infty, x) = \begin{cases} \Phi & ;\ x < 0 \\ \{TT\} & ;0 \le x < 1 \\ \{TT, HT, TH\} & ;1 \le x < 2 \\ \Omega & ;x \ge 2 \end{cases} \qquad \therefore\ X^{-1}(-\infty, x] \in F$$

Dalam praktek, definisi variabel random dibuat sederhana agar lebih mudah dipahami, sebagai berikut :

DEFINISI

Diberikan ruang probabilitas (Ω,F, P). Variabel random X adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan kodomain bilangan real.

Contoh

Perhatikan percobaan melemparkan sebuah tetrahedral (dadu bersisi empat) sebanyak dua kali. Diasumsikan setiap nomor yang akan muncul mempunyai kemungkinan yang sama. Misalkan kita tertarik pada kejadian skor maksimum dalam pelemparan tersebut, maka ruang sampel percobaan ini adalah :

Ω ={(1,1), (1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)}

Jadi X(w) = max(i, j), w = (i, j), i, j = 1, 2, 3, 4 merupakan suatu variabel random.

Maka w = {1, 2, 3, 4}

Konsep dasar variabel random berguna untuk membangun konsep tentang fungsi distribusi dikaitkan dengan ukuran probabilitas.

DEFINISI

Misalkan X variabel random yang didefinisikan pada ruang probabilitas (Ω, F, P) dengan P menyatakan ukuran probabilitas. Fungsi distribusi X ditulis dengan lambang F(x) didefinisikan sebagai :

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} \sum_{x_j}^{x} P(X = x_j) & ;\ x \text{ Diskret} \\ \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx & ;\ x \text{ Kontinu} \end{cases}$$

Dengan f(x) merupakan fungsi probabilitas X. Jika x kontinu, maka berlaku hubungan

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x)$$

Pada contoh pelemparan tetrahedral, diperoleh fungsi probabilitas dan distribusi X sebagai berikut :

Tabel 2. Fungsi Probabilitas X

X	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Fungsi Distribusi X :

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & ;\ \mathrm{x} < 1 \\ \frac{1}{16} & ; 1 \le \mathrm{x} < 2 \\ \frac{4}{16} & ; 2 \le \mathrm{x} < 3 \\ \frac{9}{16} & ; 3 \le \mathrm{x} < 4 \\ 1 & ; \mathrm{x} \ge 4 \end{cases}$$

Sifat-sifat yang dimiliki fungsi distribusi :

(i) $\operatorname*{limit}_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(ii) $\operatorname*{limit}_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(iii) F kontinu kanan, yaitu $\operatorname*{limit}_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$

(iv) F fungsi yang tidak turun, yaitu jika a<b maka F(a) $\le$ F(b)

Sifat (iv) mudah dilihat dari kenyataan :

- $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup [a, b]$; $a < b$
- $P(-\infty, b] = P(-\infty, a] + P[a, b]$
- $P(-\infty, b] \ge P(-\infty, a]$ (Note : $P(x) \ge 0$)

$\therefore$ Jadi $F(b) \ge F(a)$

Konsep-konsep dasar lain yang sangat penting dalam mempelajari Proses Stokastik adalah Ekspektasi, Variansi, Covariansi dan Keindependenan suatu variabel.

DEFINISI

Misalkan X variabel random dengan fungsi probabilitas f(x). Ekspektasi dari X didefinisikan sebagai :

$$E(X) = \begin{cases} \sum x_j P(x_j) & ; X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx & ; X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Ekspektasi X sering pula diberi simbol μ atau μ_x.

Sifat-sifat Ekspektasi (Nilai Harapan)
Jika g dan h fungsi-fungsi dari variabel random X, maka :

(i) E(c) = c , untuk c konstanta
(ii) E[c g(x)] = c E[g(x)], c konstanta
(iii) E[c g(x) + d h(x)] = c E[g(x)] + d E[h(x)] , c dan d konstanta
(iv) E[c g(x) + d] = c E[g(x)] + d
(v) Jika $g(x) \leq h(x)$ maka $E[g(x)] \leq E[h(x)]$, $\forall x$

DEFINISI
Variansi (ragam) variabel random X diberikan oleh :

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X - \mu_x]^2$$

Notasi lain yang sering diberikan untuk Var(X) adalah σ^2 atau σ_x^2. Ukuran penyebaran data selain variansi adalah standar deviasi yang didefinisikan sebagai akar postitif dari variansi.

$$\sigma = \sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Sifat-sifat Variansi

(i) Jika c konstanta, maka Var(X) = 0
(ii) $Var(cX) = c^2\, Var(X)$
(iii) $Var(cX+d) = c^2\, Var(X)$, c dan d konstanta
(iv) $Var(X) = E[X^2] - [E(X)]^2 = E[X^2] - \mu_x^2$

1.2.2. Kovariansi dan Korelasi Dua Variabel Random

DEFINISI
Misalkan X dan Y dua variabel random yang didefinisikan pada ruang probabilitas yang sama. Covariansi antara X dan Y didefinisikan sebagai :

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

Koefisien korelasi antara X dan Y didefinisikan sebagai :

$$\rho_{xy} = \rho[X,Y] = \frac{\mathrm{Cov(X, Y)}}{\sigma_{\mathrm{x}}\ \sigma_y} \quad ; \sigma_x > 0,\ \ \sigma_y > 0$$

Kovariansi dan korelasi variabel random X dan Y mengukur suatu hubungan linear dari X dan Y, artinya Cov(X, Y) akan positif jika (X-μ_x) dan (Y-μ_y) menuju ke tanda yang sama, sebaliknya Cov(X, Y) akan negatif jika (X-μ_x) dan (Y-μ_y) menuju ke tanda yang berlawanan.

Sifat-sifat covariansi dan variansi :

(i) Cov (aX, bY) = a b Cov (X, Y) ; a dan b konstanta

(ii) Cov (a+X, b+Y) = Cov (X, Y)

(iii) Cov (X, aX+b) = a Var (X)

(iv) Cov (X, Y) = E (XY) - $\mu_x\mu_y$

Cov (X, Y) = 0 jika X dan Y independen

(v) Var (X+Y) = Var (X) + Var (Y) + 2 Cov (X, Y)

Secara Umum :

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \mathrm{Cov}(X,Y)$$

Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ independen maka :

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ \mathrm{Var}(X_i)$$

(vi) $$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\ ,\sum_{j=1}^{m} a_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j\ \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

1.3. Fungsi Pembangkit Momen (*Moment Generating Function* – MGF)

Suatu nilai khusus dari ekspektasi yang sangat berguna dalam pengembangan teori dan aplikasi statistika adalah MGF.

Definisi :

Jika X variabel random, maka nilai harapan :

$$M_x(t) = E\,(e^{tx}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} & ;\ \text{X diskret} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & ;\ \text{X kontinu} \end{cases}$$

dinamakan MGF dari X, jika nilai harapan ini ada untuk $-h < t < h$, $h > 0$. Perhatikan bahwa jika kita mengekspansi fungsi e^{tx} ke dalam Deret Maclaurin, akan diperoleh

$$M_x(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r \, E(x^r)}{r!}$$

Selanjutnya juga diperoleh hubungan :

(i) $M_x^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)dx$ dan $M_x^{(1)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = E(X)$

(ii) $M_x^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, e^{tx} f(x)dx$ dan $M_x^{(2)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = E(X^2)$

$\vdots$

(r) $M_x^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, e^{tx} f(x)dx$ dan $M_x^{(r)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx = E(X^r)$

Apabila sekarang diberikan kuantitas :

$$R(t) = \ln M_x(t)$$

Diperoleh :

$R^{(1)}(t) = \dfrac{M_x^{(1)}(t)}{M_x(t)}$ dan $R^{(1)}(0) = \dfrac{M_x^{(1)}(0)}{M_x(0)} = M_x^{(1)}(0) = E(X) = \mu$; $M_x(0) = E(e^0) = 1$

$R^{(2)}(t) = \dfrac{M_x(t)\, M_x^{(2)}(t) - \left[M_x^{(1)}(t)\right]^2}{\left[M_x(t)\right]^2}$ dan

$$\begin{aligned}
R^{(2)}(0) &= \frac{M_x(0)\, M_x^{(2)}(0) - \left[M_x^{(1)}(0)\right]^2}{\left[M_x(0)\right]^2} \\
&= \frac{1.\, M_x^{(2)}(0) - \left[M_x^{(1)}(0)\right]^2}{1^2} \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

Sifat-sifat MGF :

Jika X variabel random , a suatu konstanta, $Y_1 = aX$, dan $Y_2 = aX + b$, maka :

$$M_{Y_1}(t) = M_{(aX)}(t) = M_X(at)$$

$$M_{Y_2}(t) = M_{(aX+b)}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Momen Faktorial dan *Factorial Moment Generating Function (*FMGF)

Definisi :
Jika X variabel random maka Momen Faktorial ke-r dari X didefinisikan sebagai :

$E[X(X-1)(X-2) \ldots (X-r+1)]$

sedangkan FMGF dari X didefinisikan sebagai :

$G_x(t) = E(t^x)$

FMGF juga sering diberi nama *Probability Generating Function* (PGF).
Perhatikan bahwa :

$G_x(t) = E(t^X) = E(e^{X \ln t}) = M_x(\ln t)$.

Apabila $G_x(t)$ diturunkan terhadap t, didapat :

$G_x^{(1)}(t) = E(X\,t^{X-1})$ dan $G_x^{(1)}(1) = E(X\,t^{X-1}) = E(X)$

$G_x^{(2)}(t) = E(X\,(X-1)\,t^{X-2})$ dan $G_x^{(2)}(1) = E(X(X-1))$

$\vdots$

$G_x^{(r)}(1) = E\big(X\,(X-1)\ldots(X-r+1)\big)$

Tabel 3. Ringkasan MGF Beberapa Fungsi Distribusi Probabilitas (Diskret dan Kontinu)

Distribusi	**Fungsi Probabilitas f(x)**	**MGF**	**Mean dan Variansi**
Bernoulli	$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}$; x = 0,1	$pe^t + q$	p, pq
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$; x = 0, 1, ..., n	$\left[pe^t + q\right]^n$	np, npq
Binomial Negatif	$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$;x = r, r+1, ...	$\left[\dfrac{p}{1-qe^t}\right]^r$	$\dfrac{r}{p}$, $\dfrac{rq}{p^2}$
Geometrik	$f(x) = pq^{x-1}$; x = 1, 2, ...	$\dfrac{p}{1-qe^t}$	$\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{q}{p^2}$
Hypergeometrik	$f(x) = \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	-	$\dfrac{nM}{N}$, $\dfrac{nM}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$
Poisson	$f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$; x = 0, 1, 2, ...	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ , λ
Diskret uniform	$f(x) = \dfrac{1}{N}$; x = 1,2, ...,N	$\dfrac{1}{N}.\dfrac{e^t - e^{t(N-1)}}{1-e^t}$	$\dfrac{N+1}{2}$, $\dfrac{N^2-1}{12}$

Uniform (kontinu)	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}$; a < x < b	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$	$\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$;-∞<x<∞	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$	μ , σ^2
Gamma	$f(x)=\dfrac{1}{\theta^\alpha\,\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}$; 0<x<∞	$\left(\dfrac{1}{1-\theta\,\mathrm{t}}\right)^\alpha$	$\alpha\theta$, $\alpha\theta^2$
Eksponensial	$f(x)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$; x > 0	$\dfrac{1}{1-\theta\,\mathrm{t}}$	θ , θ^2

1.4. Distribusi Bersyarat (*Conditional Distribution*)

Dalam mempelajari suatu proses stokastik, kita sering menjumpai distribusi probabilitas bersyarat suatu variabel random termasuk pula ekspektasi bersyarat variabel random tersebut

Definisi :
Distribusi probabilitas bersyarat variabel random X_1 dan X_2 dengan fungsi probabilitas bersama $f(x_1, x_2)$ didefinisikan sebagai :

$$f(x_2 \mid x_1)=\frac{f(x_1,x_2)}{f(x_1)} \quad ; \; f(x_1) > 0$$

$f(x_2|x_1)$ sering disebut sebagai distribusi probabilitas dari X_2 apabila diberikan $X_1 = x_1$. Dengan definisi yang serupa diperoleh distribusi probabilitas bersyarat X_1 apabila diberikan $X_2 = x_2$ sebagai :

$$f(x_1 \mid x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f(x2)} \quad ; \; f(x_2) > 0$$

Pada kasus kontinu, probabilitas bersyarat kejadian berbentuk $[a \le x_2 \le b]$ apabila diberikan $X_1= x_1$ adalah :

$$P[a \le x_2 \le b \mid X_1= x_1] = \int_a^b f(x_2 \mid x_1)dx_2$$

$$= \int_a^b \frac{f(x_1,x_2)}{f(x_1)}dx_2$$

$$= \frac{\int_a^b f(x_1,x_2)\;dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\;dx_1}$$

Perhatikan bahwa distribusi probabilitas bersyarat $f(x_2|x_1)$ memenuhi suatu fungsi distribusi probabilitas meliputi :

(i) $f(x_2 \mid x_1) = \dfrac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} \geq 0$

(ii)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2 \mid x_1) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} dx_2$$
$$= \frac{1}{f(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$
$$= \frac{1}{f(x_1)} f(x_1) = 1$$

Contoh :
Distribusi probabilitas bersama antara X dan Y diberikan oleh tabel berikut.

y \ x	0	1	P(Y=y)
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{10}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{15}{25}$
P(X=x)	$\frac{10}{25}$	$\frac{15}{25}$	1

Probabilitas bersyarat diberikan oleh :

- P(X=x|Y=0) = $\dfrac{P(X=x, Y=0)}{P(Y=0)} = \begin{cases} \dfrac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} & ;\ x=0 \\ \dfrac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} & ;\ x=1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \dfrac{4/25}{10/25} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} & ;\ x=0 \\ \dfrac{6/25}{10/25} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} & ;\ x=1 \end{cases}$$

- P(X=x|Y=1) = $\dfrac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \dfrac{P(X=0, Y=1)}{P(Y=1)} & ;\ x=0 \\ \dfrac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} & ;\ x=1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \dfrac{6/25}{15/25} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} & ;\ x=0 \\ \dfrac{9/25}{15/25} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} & ;\ x=1 \end{cases}$$

Dengan cara serupa coba tentukan :
1. P(Y=y|X=0)
2. P(Y=y|X=1)

Definisi :
Misalkan X dan Y variabel random yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas (Ω,F,P) dan h suatu fungsi yang terukur Borel. Asumsikan bahwa E(h(x)) ada. Ekspektasi bersyarat h(x) apabila diberikan Y=y ditulis dengan simbol E(h(x)|y) didefinisikan sebagai :

$$E(h(x)|y) = \begin{cases} \sum_x h(x) P(X=x \mid Y=y) & ;\ \text{jika (x, y) diskret dan P(Y = y)} > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x \mid y)\, \mathrm{dx} & ;\ \text{jika (x, y) kontinu dan f(y)} > 0 \end{cases}$$

Sifat-sifat Ekspektasi Bersyarat :
- (i) E(c|y) = c ; c konstanta
- (ii) E(ax + b|y) = aE(x|y) + b ; a, b konstanta
- (iii) Jika x ≥ 0 maka E(x|y) ≥ 0
- (iv) Jika $x_1 \geq x_2$ maka $E(x_1|y) \geq E(x_2|y)$
- (v) Jika g_1, g_2 fungsi-fungsi Borel dan $E(g_1(x))$ dan $E(g_2(x))$ ada, maka :
  $E[(a_1g_1(x) + a_2\, g_2(x))|y] = a_1E(g_1(x)|y) + a_2\, E(g_2(x))$

Contoh :
Misalkan (X,Y) mempunyai distribusi probabilitas bersama f(x,y) = 2, 0< x < y < 1.
Tentukan :
1. f(x|y)
2. f(y|x)

3. E(x|y)
4. E(y|x)

Penyelesaian :

1. f(x|y) = $\dfrac{f(x,y)}{f(y)} = \dfrac{2}{\int_0^y f(x,y)dx} = \dfrac{2}{\int_0^y 2\,dx} = \dfrac{2}{2y} = \dfrac{1}{y}$; untuk 0 < x < y
2. f(y|x) = $\dfrac{f(x,y)}{f(x)} = \dfrac{2}{\int_x^1 f(x,y)dy} = \dfrac{2}{\int_x^1 2\,dy} = \dfrac{2}{2-2x} = \dfrac{1}{1-x}$; untuk x < y < 1
3. E(x|y) = $\int_0^y xf(x\,|\,y)dx = \int_0^y x\dfrac{1}{y}dx = \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{2}x^2\Big|_0^y\right) = \dfrac{1}{2y}\left(y^2-0\right) = \dfrac{y}{2}$; 0< y < 1
4. E(y|x) = $\int_x^1 yf(y\,|\,x)dy = \int_x^1 y\dfrac{1}{1-x}dy = \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{2}y^2\Big|_x^1\right) = \dfrac{1}{2(1-x)}\left(1-x^2\right) = \dfrac{1+x}{2}$;
   0 <x<1

Juga dapat dihitung E(x^2|y) dan Var(x|y) sebagai berikut :

E(x^2|y) = $\int_0^y x^2 f(x\,|\,y)dx = \int_0^y x^2\dfrac{1}{y}dx = \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^y\right) = \dfrac{1}{3y}\left(y^3-0\right) = \dfrac{y^2}{3}$

Var(x|y) = E(x^2|y) – [E(x|y)]^2 = $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{y^2}{12}$; 0 < y < 1

Sifat-sifat lain Ekspektasi Bersyarat

a. Jika E(h(x)) ada, maka
   E(h(x)) = E[E(h(x)|y)], khusus untuk h(x) = x diperoleh E(x) = E[E(x|y)]
b. Jika E(x^2) < ∞ maka Var(x) = Var[E(x|y)] + E[Var(x|y)]
c. Jika E(x^2) < ∞ maka Var(x) ≥Var[E(x|y)]

Perhatikan bahwa jika X_1 dan X_2 variabel random dengan fungsi probabilitas bersama f(x_1,x_2) dan fungsi marginal masing-masing f(x_1) dan f(x_2), maka :

f(x_1,x_2) = f(x_1) . f(x_2|x_1) = f(x_2). f(x_1|x_2)

Jika x_1 dan x_2 independen, maka

f(x_2|x_1) = $\dfrac{f(x_1,x_2)}{f(x_1)} = \dfrac{f(x_1)f(x_2)}{f(x_1)} = f(x_2)$

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1,x_2)}{f(x_2)} = \frac{f(x_1)f(x_2)}{f(x_2)} = f(x_1)$$

Contoh :

Diberikan fungsi probabilitas bersama X dan Y, dengan :

$$f(x,y) = x + y\ ;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{x+y}{\int_0^1 f(x,y)dy} = \frac{x+y}{\int_0^1 (x+y)\,dy} = \frac{x+y}{xy+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\ ;\ 0 < y < 1$$

Bila diinginkan menghitung P[0 < y < ½ |x = ¼] maka :

$$P[0 < y < \tfrac{1}{2}\,|x = \tfrac{1}{4}] = \int_0^{0,5} f(y\,|\,x = 0,25)dy$$

$$= \int_0^{0,5} \frac{0,25+y}{0,25+0,5}dy = \frac{4}{3}\left(0,25y + 0,5y^2 \Big|_0^{0,5}\right)$$

$$= \frac{4}{3}(0,125+0,125) = \frac{4}{3}\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Beberapa Hal Penting Lain

Misalkan X variabel random vektor berdimensi k dan g fungsi terukur bernilai real, didefinisikan pada R^k sedemikian sehingga g(x) merupakan suatu variabel random. Jika c > 0, maka :

$$P[g(x) \geq c] \leq \frac{E[g(x)]^2}{c^2}$$

Kasus Khuus

1. Misalkan X variabel random dan dengan mengambil $g(x) = |x - \mu|^r$; μ=E(X), r > 0; maka :

$$P[|x - \mu| \geq c] = P[|x - \mu|^r \geq c^r] \leq \frac{E\left(|x-\mu|^r\right)}{c^r}$$ Ketaksamaan Markov

2. Misalkan X variabel random dan dengan memasangkan $g(x) = |x - \mu|^2$, μ = E(X) maka :

$$P\left[|x-\mu| \geq c\right] = P\left[|x-\mu|^2 \geq c^2\right] \leq \frac{E|x-\mu|^2}{c^2}$$

$$P\left[|x-\mu| \geq c\right] \leq \frac{Var(x)}{c^2}$$ Ketaksamaan Chebyshev

$$P[|x-\mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

Bila c = kσ, ketaksamaan Chebyshev dalam penentuan selang kepercayaan (*Confidence Interval* / CI) akan diperoleh sebagai berikut :

$$P[|x-\mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

***Laws of The Large Number* (LLN)**

Konsep penting dalam LLN (Hukum Bilangan Besar) adalah *Strong Laws of The Large Number* (SLLN) dan *Weak Laws of The Large Number* (WLLN).

Teorema SLLN

Jika x_j, j = 1, 2, ..., n identik independen (**iid**) dengan mean berhingga μ maka :

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \xrightarrow{as} \mu \text{ , n} \rightarrow \infty$$

Teorema WLLN

Jika x_j, j = 1, 2, ..., n identik independen (**iid)** dengan mean berhingga μ maka :

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \text{ , n} \rightarrow \infty$$

Central Limit Theorem (CLT) / (Teorema Limit Pusat)

Teorema CLT

Misalkan x_1, x_2, ..., x_n variabel random **iid** dengan mean $\mu < \infty$ dan variansi $\sigma^2 < \infty$, misalkan pula :

$$G_n(x) = P\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu)}{\sigma} \leq x\right] \text{ dan } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Maka :

$$G_n(x) \xrightarrow{d} \Phi(x) \quad \text{, x} \in \Re$$

Teorema Slutsky

Jika $X_n \xrightarrow{d} x$ dan $Y_n \xrightarrow{d} c$, n → ∞ , c ≠ 0 maka :

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} x + c$, n → ∞

(ii) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cx$, n → ∞

(iii) $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \dfrac{x}{\mathrm{c}}$, n → ∞

Contoh soal

1. Pada suatu pesta datang n orang, masing-masing menyerahkan satu sapu tangan diletakkan di keranjang. Setelah semua sudah menyerahkan sapu tangan, masing-masing dengan mata tertutup mengambil satu sapu tangan dari dalam keranjang itu. Jika X menyatakan banyaknya orang yang mengambil sapu tangannya sendiri, berapakah E(X) dan Var(X) ?

   Penyelesaian :

   Bila X menyatakan banyaknya orang yang mengambil sapu tangannya sendiri, dan didefinisikan :

   $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{; orang ke - i mengambil sapu tanga nnya sendiri} \\ 0 & \text{; orang ke - i mengambil sapu tanga n orang lain} \end{cases}$$

   Maka $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$; $P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$ dan $P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n}$

   $E(X_i) = 1.\ P(X_i = 1) + 0.\ P(X_i = 0) = \frac{1}{n}$

   $Var(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$

   $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - [E(X_i)E(X_j)]$

   $$\text{dengan } X_i X_j = \begin{cases} 1 & \text{; keduanya mengambil sapu tanga nnya sendiri} \\ 0 & \text{; jika tidak demikian} \end{cases}$$

   $E(X_iX_j) = 1.\ P(X_i=1, X_j=1) + 0.\ P(X_i=1, X_j=0 \text{ atau } X_i=0, X_j=1 \text{ atau } X_i=0, X_j=0)$

   $= P(X_i = 1).\ P(X_j = 1 \mid X_i = 1)$

   $= 1.\ \frac{1}{n} . \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$

   $Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$

   Maka $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n.\frac{1}{n} = 1$ dan

   $Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$

   $= n . \frac{n-1}{n^2} + 2 \binom{n}{2} \frac{1}{n^2(n-1)}$

   $= \frac{n-1}{n} + n(n-1).\ \frac{1}{n^2(n-1)} = 1$

Jadi E(X) = 1 dan Var(X) = 1

2. Sebuah kotak berisi n bola putih dan m bola hitam. Diambil k bola sekaligus dari kotak tersebut. Jika X menyatakan banyaknya bola putih yang terambil, tentukan :
   a. P(X=i), untuk i = 0, 1, ..., k
   b. E(X)

   Penyelesaian :

   a. Banyak ruang sampel : n(Ω) = $\binom{n+m}{k}$

      Banyak bola putih dari k bola yang terambil n(X=i) = $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

      Maka P(X=i) = $\dfrac{n(X=i)}{n(\Omega)} = \dfrac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}$

   b. E(X) = $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i\left(\frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{k} i\left(\frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}\right) = \sum_{i-1=0}^{k-1} i\,\frac{\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}\binom{m}{k-i}}{\frac{(n+m)}{k}\binom{n+m-1}{k-1}} = \frac{nk}{n+m}\sum_{i-1=0}^{k-1}\frac{\binom{n-1}{i-1}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m-1}{k-1}}$$

$$= \frac{nk}{n+m}$$

Soal Latihan

1. Diketahui fungsi distribusi sebagai berikut : F(x) = $\begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ x^3 & ; 0 < x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$

   Tentukan :
   a. Grafik (plot) dari F(x)!
   b. Fungsi densitas (fungsi probabilitas) f(x)!
   c. Nilai P(¼ ≤ X ≤ ¾)

2. Suatu varibel random X mempunyai fungsi densitas f(x) = $\begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$

   Tentukan fungsi distribusi, mean dan varians dari X tersebut!

3. Sebuah uang setimbang dilemparkan sampai muncul sisi sama dua kali berturutan untuk pertama kalinya. Bila N menyatakan jumlah lemparan yang diperlukan, tentukan :
   a. Tentukan fungsi probabilitas untuk N
   b. Bila A menyatakan kejadian bahwa N genap dan B menyatakan kejadian bahwa N ≤ 6, maka tentukan P(A), P(B) dan P(AB)

4. Variabel random X dan Y saling independent dengan fungsi kepekatan probabilitas sebagai berikut :

   $P_x(0) = ½$; $P_x(3) = ½$; $P_y(1) = \frac{1}{6}$; $P_y(2) = \frac{1}{3}$; $P_y(3) = ½$

   Tentukan fungsi kepekatan probabilitas $P_z(z)$, untuk Z = X + Y

5. Bila X adalah variabel random yang berdistribusi eksponensial dengan parameter λ. Tentukan mean dari (X).

BAB II
PROSES STOKASTIK

Kompetensi Dasar : Mahasiswa membedakan macam-macam (spesifikasi) Proses Stokastik

Tujuan Pembelajaran :

1. Memahami pengertian proses stokastik.
2. Menguraikan spesifikasi proses stokastik menurut sifat *state space* dan parameter *space*nya

2.1. Pengertian Proses Stokastik

Sejak dahulu pemanfaatan model yang menggunakan probabilitas lebih disenangi dibanding model yang deterministik. Pengamatan dilakukan pada saat-saat yang berbeda, tidak dilakukan pada suatu periode waktu tertentu, sehingga menyangkut masalah probabilitas. Banyak fenomena fisika, sosial, teknik dan manajemen saat ini diselidiki merupakan fenomena yang random dengan suatu probabilitas.

Proses Stokastik (*Stochastic Processes*) adalah himpunan variabel random yang merupakan fungsi dari "waktu" (time). Parameter "waktu" disini diartikan dalam arti luas. Proses stokastik sering juga disebut Proses Random (*Random Processes*).

Perhatikan contoh berikut :

Contoh 1. Sebuah dadu dilempar

(i) Seandainya variabel random X_n menyatakan hasil lemparan ke-n, n > 1, maka $\{X_n, n > 1\}$ merupakan himpunan variabel random, untuk n yang berbeda akan didapat variabel random yang berbeda X_n, ini membentuk proses stokastik.

(ii) Seandainya Y_n = banyaknya "enam" yang tampak dalam n lemparan pertama. Tiap nilai n akan menghasilkan variabel random Y_n yang berbeda yaitu $Y_1 = \{0, 1\}$, $Y_2=\{0,1,2\}$, $Y_3=\{0,1,2,3\}$ dan seterusnya, jadi $\{Y_n, n > 1\}$merupakan himpunan variabel random, ini juga merupakan proses stokastik.

(iii) Bila Z_n menyatakan banyak titik yang tampak maximum selama n lemparan pertama, $\{Z_n, n \geq 1\}$ juga merupakan proses stokastik.

Contoh 2. Terdapat r buah kotak, tersedia tak terhingga bola. Bola dimasukkan ke dalam kotak secara acak. Jika X_n menyatakan banyaknya kotak yang terisi bola setelah lemparan ke-n, maka $\{X_n, n \geq 1\}$merupakan proses stokastik. Atau seandainya Y_n menyatakan banyaknya bola yang masuk pada kotak no. 4 setelah lemparan ke-n. Disini $\{Y_n, n \geq 1\}$juga merupakan proses stokastik.

Contoh 3. Pandang variabel random yang menyatakan banyaknya pengunjung yang masuk toko swalayan selama suatu periode waktu tertentu (0, t), X(t). Himpunan X(t) dengan $t \in T$ akan merupakan proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$.

2.2. Spesifikasi Proses Stokastik

Himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variabel random X_n dari suatu proses stokastik $\{X_n, n \geq 1\}$disebut Ruang State (*State Space*). Suatu proses stokastik sering ditulis dengan simbul $\{X(t) , t \in T\}$dengan t merupakan himpunan bagian dari $\{-\infty, \infty)$.

Parameter pada proses stokastik dibedakan menjadi dua jenis, yaitu :

(i) Proses stokastik dengan parameter ("waktu") kontinu jika T merupakan suatu interval dengan panjang positif

(ii) Proses stokastik dengan parameter ("waktu") diskret jika T merupakan himpunan bagian dari suatu bilangan bulat.

Dalam proses stokastik, Ruang State S dari proses tersebut memiliki 4 kemungkinan, yaitu :

(i). Proses stokastik dengan parameter diskret, dapat menghasilkan ruang state diskret

(ii) Proses stokastik dengan prameter diskret, dapat menghasilkan ruang state kontinu

(iii) Proses stokastik dengan parameter kontinu, menghasilkan ruang state diskret

(iv) Proses stokastik dengan parameter kontinu, menghasilkan ruang state kontinu.

Dari contoh-contoh di atas, dapat kita tentukan parameter dan state spacenya sebagai berikut :

1. Jika sebuah dadu dengan enam sisi dilemparkan n kali. Misalkan didefinisikan X_n menyatakan variabel random hasil lemparan ke-n, $n \geq 1$. Maka :
   (i) $\{X_n, n \geq 1\}$ merupakan suatu proses stokastik
   (ii) Proses stokastik ini merupakan proses stokastik dengan parameter diskret
   (iii) Ruang state proses stokastik ini adalah $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bersifat diskret.

2. Jika pada contoh 1 di atas didefinisikan X_n merupakan variabel random yang menyatakan banyaknya angka enam yang tampak dalam n lemparan pertama, maka :
   (i) $\{X_n, n \geq 1\}$ merupakan suatu proses stokastik

(ii) Proses stokastik ini merupakan proses stokastik dengan parameter diskret

(iii) Ruang state proses stokastik ini meliputi :

Untuk X_1 : ruang statenya {0, 1}

Untuk X_2 : ruang statenya {0, 1, 2}

Untuk X_3 : ruang statenya {0, 1, 2, 3}

Dan seterusnya , ruang statenya diskret

3. Misalnya X(t) variabel random yang menyatakan banyaknya pengunjung yang datang pada sebuah swalayan selama periode waktu (0, t) maka :
   (i) $\{X(t), t \in T\}$ merupakan suatu proses stokastik
   (ii) Proses stokastik ini merupakan proses stokastik dengan parameter kontinu
   (iii) Ruang state proses stokastik ini meliputi :

   Untuk X(1) : menyatakan banyak pengunjung yang datang dari swalayan buka sampai 1 jam berikutnya, X(1) = 0, 1, 2, ...

   Untuk X(2) : menyatakan banyak pengunjung yang datang dari swalayan bukan sampai 2 jam berikutnya, X(2) = 0, 1, 2, ...

   Dan seterusnya, ruang statenya diskret

4. Misalnya X(t) menyatakan temperatur maksimum suatu tempat pada interval waktu (0, t), maka :
   (i) $X(t), t \in T\}$ merupakan suatu proses stokastik
   (ii) Proses stokastik ini merupakan proses stokastik dengan parameter kontinu
   (iii) Ruang state proses stokastik ini meliputi :

   Untuk X(1) : menyatakan temperatur maksimum suatu tempat sampai 1 jam berikutnya, X(1) = suatu interval nilai tertentu

   Untuk X(2) : menyatakan temperatur maksimum suatu tempat sampai 2 jam berikutnya, X(2) = suatu interval nilai tertentu

   Dan seterusnya, ruang state bersifat kontinu.

Hubungan antara X_n

Dalam kasus-kasus tertentu, variabel random X_n, $X_n \in \{X_n\}$ adalah independent satu dengan yang lain. Misal pada contoh 1, X_n : menyatakan variabel random hasil lemparan ke-n, $n \geq 1$, bila sebuah dadu dilempar. Tetapi Y_n : banyak "enam" muncul pada lemparan ke-n, $n \geq 1$ merupakan kasus yang tidak independen, karena Y_2 mestinya tergantung Y_1, tidak mungkin $Y_2 = 2$ bila $Y_1 = 0$.

Proses dengan increment independent

Jika untuk semua $t_1, t_2, ..., t_n$, dimana $t_1 < t_2 < ... < t_n$ variabel random $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ independent, maka $\{X(t), t \in T\}$ dikatakan proses stokastik increment independent. Seandainya hanya dibicarakan proses dengan parameter (waktu) dan ruang diskret, $T= \{0,1,2,...\}$, $t_i = i-1$, $X(t_i) = X_{i-1}$, $Z_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 1, 2, ...$ dan $Z_0 = X_0$. Terdapat proses $\{Z_n, n \geq 0\}$ dan Z_n merupakan variabel random independent.

Proses Markov / Rantai Markov (Marcov Chain)

Jika proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ mempunyai sifat :
$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$ untuk semua nilai $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1}$, dan sembarang n, serta $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in S$ (ruang state), proses tersebut disebut proses Markov atau rantai Markov.

Umumnya Proses Markov didefinisikan sebagai berikut :

Bila $t_1 < t_2 < ... < t_n < t$
$P(a \leq X(t) \leq b \mid X(t_1) = x_1, ..., X(t_n) = x_n) = P(a \leq X(t) \leq b \mid X(t_n) = x_n)$
Maka proses ini disebut Proses Markov atau Rantai Markov

Contoh :
X_n adalah keadaan mesin pada hari ke-n. Disini nilai $X_n = 0$ atau 1, $X_n = 0$ jika mesin rusak dan $X_n = 1$ jika mesin baik. Jadi $S = \{0, 1\}$ (Ruang state $\{0, 1\}$ untuk setiap X_n).
Mesin mulai pada suatu hari rusak atau baik. Seandainya diketahui pada hari ke-n mesin rusak, probabilitasnya pada hari itu dapat diperbaiki (berarti hari berikutnya baik) dalah p, atau $P(X_{n+1}=1 \mid X_n = 0) = p$. Sedangkan jika pada hari-hari ke-n mesin diketahui baik, probabilitasnya pada hari berikutnya rusak = q, atau $P(X_{n+1}=0 \mid X_n = 1) = q$.
Proses ini merupakan proses Markov, karena keadaan mesin pada hari esok hanya tergantung keadaan mesin hari ini, tidak tergantung pada hari-hari sebelumnya.

Contoh : Model Kotak Polya
Kotak isinya b bola biru dan r bola putih. Sebuah bola diambil dari kotak itu dan bola yang terambil dikembalikan dan ditambah c bola warna sama dengan bola terambil (c>0)

Jika variabel random X_n didefinisikan sebagai berikut :

$$X_n = \begin{cases} 1 & ;\text{pada pengambilan ke-n mendapat bola biru} \\ 0 & ;\text{pada pengambilan ke-n mendapat bola putih} \end{cases}$$

Apakah $\{X_n, n \geq 1\}$ merupakan rantai Markov?

$P(X_1 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$

$P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$

$P(X_2 = 0) = P(X_2=0 \mid X_1 = 0).\ P(X_1=0) + P(X_2=0 \mid X_1 = 1).\ P(X_1=1)$

$$= \frac{r+c}{b+r+c}\,\frac{r}{b+r} + \frac{r}{b+r+c}\,\frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}$$

$P(X_2 = 1) = P(X_2=1 \mid X_1 = 0).\ P(X_1=0) + P(X_2=1 \mid X_1 = 1).\ P(X_1=1)$

$$= \frac{b}{b+r+c}\,\frac{r}{b+r} + \frac{b+c}{b+r+c}\,\frac{b}{b+r} = \frac{b}{b+r}$$

$P(X_3=1 \mid X_1 = 0, X_2 = 1) = ...\ ?$

$P(X_3=1 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) = ...\ ?$

$P(X_3=1\ , X_2 = 1) = P(X_3=1, X_2 = 1, X_1 = 0) + P(X_3=1, X_2 = 1, X_1 = 1)$

$$= P(X_3=1 \mid X_1 = 0, X_2 = 1)\ P(X_2=1 \mid X_1 = 0).\ P(X_1=0) + P(X_3=1 \mid X_1 = 1, X_2 = 1)\ P(X_2=1 \mid X_1 = 1).\ P(X_1=1)$$

$$= \frac{b+c}{b+r+2c}.\frac{b}{b+r+c}.\frac{r}{b+r} + \frac{b+2c}{b+r+2c}.\frac{b+c}{b+r+c}.\frac{b}{b+r}$$

$$= \frac{b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)}$$

$$P(X_3=1 \mid X_2 = 1) = \frac{P(X_3 = 1, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)}$$

$$= \frac{\dfrac{b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)}}{\dfrac{b}{b+r}} = \frac{b+c}{b+c+r}$$

$P(X_3=1 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) = \dfrac{b+2c}{b+r+2c}$

$P(X_3=1 \mid X_1 = 0, X_2 = 1) = \dfrac{b+c}{b+r+2c}$

Didapat $P(X_3=1 \mid X_1 = k, X_2 = 1) \neq (X_3=1 \mid X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$, $k = 0, 1$

Jadi $\{X_n\ , n \geq 1\}$ bukan rantai Markov.

Soal Latihan

1. Tuliskan state space dan parameter space peristiwa/hal berikut :
   i) Pertandingan sepak bola
   ii) Harga saham di Bursa Efek Jakarta

2. Jelaskan bagaimana peristiwa berikut dapat dimodelkan sebagai proses stokastik? Definisikan state space dan parameter spacenya yang sesuai menurut anda :
   i) Penyebaran suatu jenis penyakit
   ii) Proses peminjaman buku di perpustakaan

3. Sebuah pabrik mempunyai 2 mesin, dimana satu beroperasi, yang lain sebagai cadangan. Probabilitas mesin rusak adalah p, dianggap kerusakan terjadi pada akhir kerja. Perusahaan mempekerjakan seorah ahli operasi mesin tersebut dan diperlukan waktu 2 hari untuk memperbaiki kerusakan yang terjadi. Definisikan suatu proses stokastik yang menggambarkan proses kerja mesin di pabrik tersebut. Tulis semua transisi yang mungkin antara state-state yang ada.

4. Eksperimen : 3 dadu sisi 6 dilempar. Tentukan spesifikasi proses stokastik yang terjadi :
   a. $\{X_n, n \geq 1\}$, X_n: jumlah titik yang tampak pada lemparan ke-n
   b. $\{Y_n, n \geq 1\}$, Y_n: banyaknya titik maksimum pada lemparan ke-n
   c. $\{Z_n, n \geq 1\}$, Z_n: jumlah titik maksimum sampai lemparan ke-n

5. Peristiwa : pasien yang dirawat di RS "A". Tentukan spesifikasi proses stokastik yang terjadi :
   a. $X(t)$: banyak pasien yang datang selama waktu $(0, t)$
   b. $Y(t)$: lama pengobatan pasien sampai sembuh selama waktu $(0, t)$
   c. $Z(t)$: biaya pengobatan pasien (rupiah) selama dirawat dalam waktu $(0, t)$

BAB III
RANTAI MARKOV/ PROSES MARKOV (*MARKOV CHAIN*)

Kompetensi Dasar : Mahasiswa mampu menguraikan tentang rantai Markov

Tujuan Pembelajaran :

1. Memahami tentang Rantai Markov
2. Menguasai konsep matriks peluang transisi dari Rantai Markov
3. Menguraikan sifat-sifat State dari Rantai Markov
4. Penentuan distribusi jangka panjang (*limiting distribution*) *irreducible markov chain*

3.1. Rantai Markov (Sifat Markov)

Dalam proses stokastik, banyak sekali proses yang mempunyai sifat khas, seperti sifat Markov. Mempelajari sifat markov sangat bermanfaat, karena :

(i) Secara teoritis sifat Markov sangat kaya dan dapat disajikan secara sederhana

(ii) Banyak sekali sistem kehidupan sehari-hari dapat dimodelkan dengan menggunakan sifat Markov

Rantai Markov dapat diaplikasikan untuk system diskret (*discrete system*) maupun sistem kontinu (*continuous system*). Sistem diskret adalah sistem yang perubahan kondisinya (state) dapat diamati/terjadi secara diskret. Sedangkan sistem kontinu adalah sistem yang perubahan kondisi dan perilaku sistem terjadi secara kontinu.

Ada beberapa syarat agar rantai markov dapat diaplikasikan dalam evaluasi keandalan sistem. Syarat-syarat tersebut adalah:

(i) Sistem harus berkarakter *lack of memory*, dimana kondisi sistem di masa mendatang tidak dipengaruhi (independent) oleh kondisi sebelumnya. Artinya kondisi sistem saat evaluasi tidak dipengaruhi oleh kondisi sebelumnya, kecuali kondisi sesaat sebelum kondisi saat ini.

(ii) Sistem harus stasioner atau homogen, artinya perilaku sistem selalu sama sepanjang waktu atau peluang transisi sistem dari satu kondisi ke kondisi lainnya akan selalu sama sepanjang waktu. Dengan demikian maka pendekatan Markov hanya dapat diaplikasikan untuk sistem dengan laju kegagalan yang konstan.

(iii) *State is identifiable*. Kondisi yang dimungkinkan terjadi pada sistem harus dapat diidentifikasi dengan jelas. Apakah sistem memiliki dua kondisi (beroperasi – gagal), tiga kondisi (100% sukses, 50% sukses, 100% gagal) dan lain sebagainya.

Pada bab ini, dibahas Rantai Markov Diskret. Misalkan S menyatakan himpunan state, n = 0, 1, 2, ... dan Xn menyatakan state sistem pada waktu n dan merupakan variabel random yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas. Suatu sistem dikatakan mempunyai sifat Markov atau Rantai Markov jika memenuhi syarat :

$$\boxed{P(Xn_{+1}=x_{n+1} \mid Xo=x_0, X_1=x_1, \ldots, Xn=x_n) = P(Xn_{+1} = x_{n+1} \mid Xn=x_n)}$$

Probabilitas bersyarat $P(Xn_{+1} = x_{n+1} \mid Xn=x_n)$ disebut **Probabilias transisi** untuk rantai Markov ini.

3.2. Probabilitas Transisi

Probabilitas transisi suatu proses markov dinyatakan sebagai :

$$P(X_{n+1}=x_{n+1} \mid Xo=x0, X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n) = P(Xn+1 = xn+1 \mid Xn=xn)$$

Ini berarti bahwa kondisi $Xo=x_0$, $X_1=x_1$, …, $X_{n-1}=x_{n-1}$ tidak mempunyai pengaruh terhadap keadaan tersebut, yang mempengaruhi probabilitas X_{n+1} hanya $X_n=x_n$. Jadi keadaan (state) sebelumnya tidak berpengaruh terhadap keadaan besok (X_{n+1}) , yang mempengaruhi hanya keadaan sekarang($X_n=x_n$).

Secara formula ditulis :

$$P_{ij}=P[X_{n+1}=j \mid X_n=i],\ \forall\, i,j \text{ dengan } P_{ij} \geq 0 \text{ dan } \sum_j P_{ij} = 1, \forall i$$

Catatan :
Jika$P[X_{n+1}=j \mid X_n=i]=P[X_1=j \mid X_0=i]$, $\forall$ n=0,1,2,… maka probabilitas transisinya bersifat stasioner.

3.3. FUNGSI TRANSISI dan DISTRIBUSI AWAL

Misalkan Xn, n≥0 suatu rantai Markov dengan state space S (Disini S adalah umum, banyak anggota S belum tentu 2 seperti contoh di atas).
Fungsi P(x, y), $x\in S$ dan $y\in S$ yang didefinisikan sebagai :

$$\boxed{P(x,y)=P(X_1=y \mid X_0=x),\ \ x,y\in S}$$

dinamakan Fungsi Transisi (*Transition Function*) untuk rantai tersebut.

Berdasarkan definisi di atas diperoleh sifat :

(i) $P(x,y) \geq 0,\ x,y\in S$

Karena $P(X_1=y|X_0=x)$ merupakan suatu probabilitas untuk $x,y \in S$

(ii) $\sum_{y \in S} P(x,y) = 1$ untuk setiap $x \in S$

$$\sum_{y \in S} P(x,y) = \sum_{y \in S} P(X_1 = y \mid X_0 = x)$$

$$= \sum_{y \in S} \frac{P(X_1 = y, X_0 = x)}{P(X_0 = x)} = 1$$

Karena rantai Markov mempunyai probabilitas stationer, yaitu:

$P(X_{n+1}=y|X_n=x)$ tidak tergantung pada nilai n, maka :

$P(X_{n+1}=y|X_n=x)= P(X_1=y|X_0=x)=P(x,y)$, untuk $n \geq 0$.

Dari sifat Markov, diperoleh :

$$\boxed{P(X_{n+1}=y|X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n)=P(x,y)}$$

Dengan kata lain:
Suatu rantai Markov state X pada waktu ke-n, maka probabilitas pada waktu ke-n+1 (waktu berikutnya) di state y sama dengan P(x,y), tidak tergantung pada bagaimana rantai itu sampai di X.

P(x,y) disebut probabilitas transisi satu langkah (*One Step Transition Probability*) dari rantai Markov tersebut.

Fungsi $\pi_0(x)$, $x \in S$ didefinisikan sebagai :

$$\boxed{\pi_0(x)=P(X_0=x),\ x \in S}$$

disebut Distribusi Awal (*Initial Distribution*) untuk rantai tersebut.
Dari definisi di atas diperoleh :

(i) $\pi_0(x) \geq 0$, $x \in S$

(ii) $\sum_{x \in S} \pi_0(x) = 1$

Distribusi bersama X_0, $X_1, \ldots, X_n$ dapat diperoleh dengan fungsi transisi dan distribusi awal.
Contoh :

1. $P(X_0=x_0, X_1=x_1)=P(X_1=x_1|X_0=x_0) \cdot P(X_0=x_0)$
   $=P(x_0,x_1) \cdot \pi_0(x_0)$

2. $P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2)=P(X_2=x_2|X_0=x_0,X_1=x_1) \cdot P(X_0=x_0,X_1=x_1)$
   $=P(x_1,x_2) \cdot P(x_0,x_1) \cdot \pi_0(x_0)$

Dengan induksi diperoleh :

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=P(x_{n-1},x_n)\ .\ P(x_{n-2},x_{n-1}) \ldots P(x_0,x_1)\ \pi_0(x_0)$$

Bukti :

(i) Untuk n=1, $P(X_0=x_0, X_1=x_1)=P(X_1=x_1 | X_0=x_0).\ P(X_0=x_0)$

$=P(x_o,x_1)\ \pi_0(x_0)$ .... (Benar)

(ii) Misalkan Benar untuk n=k

$P(X_0=x_0,X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k)=P(X_k=x_k | X_0=x_0,X_1=x_1,\ldots,X_{k-1}=x_{k-1})\ P(X_{k-1}=x_{k-1} | X_0=$
$x_0,X_1=x_1,\ldots,X_{k-2}=x_{k-2}) \ldots P(X_1=x_1 | X_0=x_0)\ P(X_0=x_0)$
$=P(x_{k-1},x_k)\ .\ P(x_{k-2},x_{k-1}) \ldots P(x_0,x_1)\ \pi_0(x_0)$

(iii) Harus dapat dibuktikan Benar untuk n=k+1

$P(X_0=x_0,k,\ldots,X_n=x_n,X_{k+1}=x_{k+1})=P(X_{k+1}=x_{k+1} | X_0=x_0,X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k)$
$=P(X_{k+1}=x_{k+1} | X_0= x_0,X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k) \ldots$
$P(X_1=x_1 | X_0=x_0)\ P(X_0=x_0)$
$=P(x_k,x_{k+1})\ .\ P(x_k,x_{k-1}) \ldots P(x_0,x_1)\ \pi_0(x_0)$

Dapat diringkaskan, distribusi persama $X_0, X_1,\ldots,X_n$ adalah :

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=P(x_{n-1},x_n)\ .\ P(x_{n-2},x_{n-1}) \ldots P(x_0,x_1)\ \pi_0(x_0)$$
$$=\pi_0(x_0)\ \ P(x_0,x_1) \ldots P(x_{n-1},x_n)$$

Contoh :

Sebuah mesin pada waktu mulai dipakai (sembarang hari) adalah rusak atau baik. Seandainya mesin tersebut rusak pada awal hari ke-n, probabilitas bahwa selama hari tersebut dapat diperbaiki dan pada awal hari berikutnya (hari ke-n+1) baik sama dengan p. Seandainya mesin pada awal hari ke-n baik, probabilitasnya mesin rusak pada awal hari ke-n+1 adalah q. Diketahui pula bahwa $\pi_0(0)$ menyatakan probabilitas mesin rusak pada awal hari ke-nol, yaitu mesin dating dari pabrik sebelum dipakai probabilitasnya rusak adalah $\pi_0(0)$. Dengan demikian, probabilitas mesin dalam keadaan baik pada awal hari ke-nol adalah $\pi_0(1) = 1 - \pi_0(0)$.

Misalkan state 0 menyatakan mesin rusak dan state 1 menyatakan mesin baik, Xn menyatakan variabel random yang menunjukkan keadaan mesin pada hari ke-n. Jadi dalam contoh ini didapat :

$S = \{0, 1\}$, n = 0, 1, 2, ...
$P(Xn_{+1}=1 | Xn=0) = p$
$P(Xn_{+1}=0 | Xn=1) = q$
$P(Xo=0)= \pi_0(0)$
$P(Xo=1)=1 - \pi_0(0)= \pi_0(1)$

Karena di sini S hanya memiliki 2 state, yaitu 0 dan 1, maka :

$P(X_{n+1}=0 | X_n=0) = 1 - p$
$P(X_{n+1}=1 | X_n=1) = 1 - q$

$P(X_{n+1}=0 | X_n=0)$ artinya jika diketahui pada hari ke-n mesin rusak, probabilitas pada hari berikutnya (hari ke-n+1) masih tetap rusak adalah 1-p.
$P(X_{n+1}=1 | X_n=1)$ artinya jika diketahui pada hari ke-n mesin baik, probabilitas pada hari berikutnya (hari ke-n+1) mesin tetap baik adalah $=1 - q$.
Dapat disusun matriks transisi statenya sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccc} & & n+1 \\ \text{state} & 0 & 1 \\ n \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 1-p & p \\ q & 1-q \end{array} \right\|} \end{array}$$

Masalahnya sekarang adalah , berapa :

a. $P(X_n=0) \rightarrow$ probabilitas hari ke-n mesin rusak tanpa diketahui keadaan mesin hari sebelumnya
b. $P(X_n=1) \rightarrow$ probabilitas hari ke-n mesin baik tanpa diketahui keadaan mesin hari sebelumnya

Uraian :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=0) &= P(X_n=0, X_{n+1}=0) + P(X_n=1, X_{n+1}=0) \\ &= P(X_{n+1}=0 | X_n=0).\, P(X_n=0) + P(X_{n+1}=0 | X_n=1).\, P(X_n=1) \\ &= (1-p)\, P(X_n=0) + q\,(1 - P(X_n=0)) \\ &= (1-p-q)\, P(X_n=0) + q \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X_{n+1}=0) = (1-p-q)\, P(X_n=0) + q}$$

Untuk $n=0 \rightarrow P(X_1=0) = (1-p-q)\, P(X_n=0) + q$
$P(X_1=0) = (1-p-q)\, \pi o(0) + q$

Untuk $n=1 \rightarrow P(X_2=0) = (1-p-q)\, P(X_1=0) + q$
$= (1-p-q)\, [(1-p-q)\, \pi o(0) + q] + q$
$= (1-p-q)^2\, \pi o(0) + q\, [1+(1-p-q)]$

Untuk $n=2 \rightarrow P(X_3=0) = (1-p-q)\, P(X_2=0) + q$
$= (1-p-q)\, [(1-p-q)^2\, \pi o(0) + q\, (1+(1-p-q))] + q$
$= (1-p-q)^3\, \pi o(0) + q\, [1+(1-p-q)+(1-p-q)^2]$

Untuk $n=3 \rightarrow P(X_4=0) = (1-p-q)\, P(X_3=0) + q$
$= (1-p-q)\, [(1-p-q)^3\, \pi o(0) + q\, (1+(1-p-q)+ (1-p-q)^2)] + q$
$= (1-p-q)^4\, \pi o(0) + q\, [1+(1-p-q)+(1-p-q)^2+(1-p-q)^3]$

...... dst ....

$$\boxed{P(X_n=0) = (1-p-q)^n\, \pi o(0) + q \sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j}$$

Untuk kasus trivial, p=q=0 maka P(Xn=0)= πo(0) dan P(Xn=1)=1-πo(0)= πo(1).
Untuk p+q>0, $\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j$ merupakan deret geometri dengan rasio)=(1–p–q), diperoleh :

$$\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j = \frac{1-(1-p-q)^n}{1-(1-p-q)} = \frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

Akibatnya diperoleh :

$$\boxed{P(Xn=0)=(1-p-q)^n \pi o(0) + q\left(\frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}\right)}$$

$$P(Xn=0) = (1-p-q)^n \pi_0(0) + \frac{q}{p+q} - \frac{q(1-p-q)^n}{p+q}$$

$$= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left[\pi_0(0) - \frac{q}{p+q}\right]$$

Akibatnya P(Xn=1)=1- P(Xn=0)

$$=1 - \left[\frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left(\pi_0(0) - \frac{q}{p+q}\right)\right]$$

$$= \frac{p+q}{p+q} - \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n\left(1-\pi_0(1) - \frac{q}{p+q}\right)$$

$$= \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n\left(\frac{p+q}{p+q} - \pi_0(1) - \frac{q}{p+q}\right)$$

$$= \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n\left(\frac{p}{p+q} - \pi_0(1)\right)$$

$$= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n\left(\pi_0(1) - \frac{p}{p+q}\right)$$

Berdasarkan penguraian dapat diringkaskan :

$$\boxed{\begin{aligned} P(Xn=0) &= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left[\pi_0(0) - \frac{q}{p+q}\right] \\ P(Xn=1) &= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n\left(\pi_0(1) - \frac{p}{p+q}\right) \end{aligned}}$$

Misalkan p dan q kedua-duanya tidak sama dengan nol dan juga tidak sama dengan 1, maka 0< $p+q$ <2, akibatnya $|1-p-q|<1$, akibatnya untuk $n\to\infty$ diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} \text{ dan } \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}$$

Pada contoh di atas, sifat-sifat Markov tidak digunakan. Misalkan sifat-sifat Markov dipenuhi, maka kita dapat menentukan distribusi bersama (*joint distributioan*) dari Xo, X_1, X_2, ..., Xn. Sebagai contoh untuk n=2, misalkan xo, x_1, x_2 bernilai 0 atau 1, maka :

$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2)=P(X_2=x_2|X_0=x_0, X_1=x_1). P(X_0=x_0, X_1=x_1)$

$= P(X_2=x_2|X_0=x_0, X_1=x_1). P(X_1=x_1|X_0=x_0). P(X_0=x_0)$

Disini kita akan bisa menghitung $P(X_0=x_0)$dan $P(X_1=x_1|X_0=x_0)$ dengan menggunakan p,q dan $\pi_0(0)$. Tetapi kita tidak akan bisa menghitung nilai dari $P(X_2=x_2|X_0=x_0, X_1=x_1)$ tanpa menggunakan sifat Markov. Jika sifat Markov berlaku maka :

$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2)=P(X_2=x_2|X_0=x_0, X_1=x_1). P(X_0=x_0, X_1=x_1)$

$= P(X_2=x_2|X_1=x_1). P(X_1=x_1|X_0=x_0). P(X_0=x_0)$

Misalkan xo=0, x_1=1, dan x_2=0 maka :

$P(X_0=0, X_1=1, X_2=0)= P(X_2=0|X_1=1). P(X_1=1|X_0=0). P(X_0=0)$

$=q.\ p.\ \pi_0(0)$

Selanjutnya juga dapat dihitung distribusi bersama Xo, X_1, X_2 untuk state-state yang lain :

$P(X_0=0, X_1=0, X_2=0)= P(X_2=0|X_1=0). P(X_1=0|X_0=0). P(X_0=0)$

$=(1-p)\ (1-p)\ \pi_0(0) = (1-p)^2\ \pi_0(0)$

$P(X_0=0, X_1=0, X_2=1)= P(X_2=1|X_1=0). P(X_1=0|X_0=0). P(X_0=0)$

$=p\ (1-p)\ \pi_0(0)$

$P(X_0=0, X_1=1, X_2=1)= P(X_2=1|X_1=1). P(X_1=1|X_0=0). P(X_0=0)$

$=(1-q)\ p = (1-q)\ p\ \pi_0(0)$

Secara keseluruhan, dalam bentuk tabel diperoleh :

x_0	x_1	x_2	$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2)$
0	0	0	$(1-p)^2\ \pi_0(0)$
0	0	1	$(1-p)\ p\ \pi_0(0)$
0	1	0	$p\ q\ \pi_0(0)$
0	1	1	$p\ (1-q)\ \pi_0(0)$
1	0	0	$q\ (1-p)\ \pi_0(1)=q\ (1-p)\ (1-\pi_0(0))$
1	0	1	$q\ p\ \ \pi_0(1)= q\ p\ (1-\pi_0(0))$
1	1	0	$(1-q)q\ \pi_0(1)=(1-q)q\ (1-\pi_0(0))$
1	1	1	$(1-q)^2\ \ \pi_0(1)=(1-q)^2\ (1-\pi_0(0))$

Beberapa Contoh Rantai Markov

1. Rantai Ehrenfest (*Ehrenfest Chain*)

   Diberikan dua buah kotak (kotak I dan kotak II dan d bola dengan nomor 1, 2,...d. Awalnya sebagian bola diletakkan pada kotak I dan sisanya di kotak II. Tersedia lotery dengan nomor 1, 2, ...,d. Mula-mula diambil selembar lotery secara random, dilihat nomor berapa yang terambil, dipindah dari kotaknya dan dimasukkan ke kotak lain. Proses ini dilakukan tak hingga kali. Pengambilan lotery secara random dan dikembalikan sebelum pengambilan berikutnya.

   Jika Xn, $n \geq 0$ menyatakan banyaknya bola pada kotak I setelah trial ke-n, maka Xn merupakan rantai Markov dengan ruang state $S=\{0,1,2,...,d\}$, tentukan fungsi transisi dari rantai tersebut!

   Penyelesaian :
   Misalkan ada x bola pada kotak I pada waktu ke-n, maka terdapat (d-x) bola pada kotak II. Pada waktu ke-(n+1) akan mengambil sebuah bola dari kotak I, tergantung pada lotery yang terambil. Jadi probabilitas untuk mengambil bola pada kotak I adalah $\frac{x}{d}$ dan bola dipindahkan ke dalam kotak II. Ini berarti bahwa banyaknya bola di kotak I pada waktu ke-(n+1) sama dengan (x-1), atau :

   $P(x_{n+1}=x-1\,|\,x_n=x)=P(x,x-1)=\frac{x}{d}$

Dengan cara yang sama akan didapat $P(x_{n+1}=x+1 \mid x_n=x)=P(x,x+1)= \dfrac{d-x}{d}$ dan $P(x_{n+1}=y \mid x_n=x)=P(x,y)=0$ untuk $y \neq x-1$ atau $y \neq x+1$, sehingga diperoleh fungsi transisi :

$$P(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{d} & ;\text{ untuk } y = x-1 \\ \dfrac{d-x}{d} & ;\text{ untuk } y = x+1 \\ 0 & ;\text{ untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

2. Rantai Penjudi (Gembler's Ruin Chain)

   Misalkan seorang penjudi, setiap kali main dia pasang 1 dolar. Probabilitas dia akan menang adalah p, dan probabilitas dia kalah adalah q, q = 1-p. Menang berarti dia dapat satu dolar, kalah berarti kehilangan 1 dolar. Modal penjudi bisa mencapai 0 (habis) dan akan tetap sama dengan 0 (seterusnya). Misalkan Xn, n ≥0 menyatakan modal penjudi pada waktu ke-n, maka fungsi transisinya adalah :

   $P(x_{n+1}=x-1 \mid x_n=x)=P(x,x-1)=q$

   $P(x_{n+1}=x+1 \mid x_n=x)=P(x,x+1)=p$

   Atau

$$P(x,y)=\begin{cases} q & ;\text{ untuk } y = x-1 \\ p & ;\text{ untuk } y = x+1 \\ 0 & ;\text{ untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

DEFINISI

Suatu state a∈S dari rantai Markov dinamakan State Absorbing jika :

P(a,a)=1 atau P(a,y)=0 untuk y≠a.

Pada contoh 2, Rantai Penjudi di atas, 0 adalah rantai absorbing, karena P(0,0)=1, sebab setelah modal habis, seterusnya modalnya habis, P(0,0)=1.
Pada rantai Markov ini ruang statenya, S={0,1,2,3, ...} (modal penjudi bisa tak berhingga).

3.4 FUNGSI TRANSISI m LANGKAH

Pada pembahasan sebelumnya kita telah mempelajari fungsi transisi satu langkah P(x,y), selanjutnya dipelajari fungsi transisi m langkah dari suatu rantai Markov.

Definisi

Fungsi transisi m langkah dari suatu rantai Markov, diberikan oleh $P^m(x,y)$ yang menyatakan probabilitas dari suatu state x ke state y dalam m langkah, yaitu :

$$P^m(x,y) = P(X_{n+m}=y \mid X_n=x)\ ,\ \ m \geq 2$$

$$= \sum_{y_1\in S}\sum_{y_2\in S}\ldots\sum_{y_m\in S} P(x,y_1)P(y_1,y_2)\ldots P(y_{m-1},y)$$

Untuk m=1, diperoleh :

$$P^1(x,y) = P(X_{n+1}=y \mid X_n=x) = P(x,y)$$

Untuk m=0, diperoleh :

$$P^0(x,y) = P(X_n=y \mid X_n=x) = \begin{cases} 1 & \text{, untuk } x = y \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Teorema

Fungsi m langkah $P^m(x,y)$ dari suatu rantai Markov mempunyai sifat :

$$P^m(x,y) = \sum_z P(x,z)\ P^{m-1}(z,y)$$

Sebagai suatu catatan, fungsi transisi m langkah P^m dapat dinyatakan sebagai pangkat m dari fungsi transisi satu langkah P

Bukti :

$$P^m(x,y) = P(X_{n+m}=y \mid X_n=x)$$

$$= P(X_m=y \mid X_0=x)$$

$$= \sum_z P(X_m = y, X_1 = z \mid X_0 = x)$$

$$= \sum_z \frac{P(X_m = y, X_1 = z, X_0 = x)}{P(X_0 = x)}$$

$$= \sum_z \frac{P(X_m = y \mid X_1 = z, X_0 = x)P(X_1 = z, X_0 = x)}{P(X_0 = x)}$$

$$= \sum_z \frac{P(X_m = y \mid X_1 = z, X_0 = x)P(X_1 = z \mid X_0 = x)P(X_0 = x)}{P(X_0 = x)}$$

$$= \sum_z P(X_m = y \mid X_1 = z, X_0 = x)\, P(X_1 = z \mid X_0 = x)$$
$$= \sum_z P(X_1 = z \mid X_0 = x)\, P(X_m = y \mid X_1 = z, X_0 = x)$$
$$= \sum_z P(x, z)\ \ P^{m-1}(z, y)$$

Terbukti $P^m(x,y) = \sum_z P(x, z)\ \ P^{m-1}(z, y)$

Sifat umum dari fungsi transisi m langkah disajikan teorema berikut.

Teorema

Jika $P^{m+n}(x,y)$, P^m (x,z), dan $P^n(z,y)$ menyatakan fungsi-fungsi transisi m+n, m, dan n langkah dari suatu rantai Markov, maka :

$$P^{n+m}(x, y) = \sum_z P^n(x, z)\ \ P^m(z, y)$$

Bukti :

$P^{n+m}(x,y) = P(X_{n+m}=y \mid X_0=x)$

$$= \sum_z P(X_{n+m} = y, X_n = z \mid X_0 = x)$$
$$= \sum_z \frac{P(X_{n+m} = y, X_n = z, X_0 = x)}{P(X_0 = x)}$$
$$= \sum_z \frac{P(X_{n+m} = y \mid X_n = z, X_0 = x) P(X_n = z, X_0 = x)}{P(X_0 = x)}$$
$$= \sum_z \frac{P(X_{n+m} = y \mid X_n = z, X_0 = x)\, P(X_n = z \mid X_0 = x) P(X_0 = x)}{P(X_0 = x)}$$
$$= \sum_z P(X_{n+m} = y \mid X_n = z, X_0 = x)\, P(X_n = z \mid X_0 = x)$$
$$= \sum_z P(X_n = z \mid X_0 = x)\, P(X_{m+n} = y \mid X_n = z, X_0 = x)$$
$$= \sum_z P^n(x, z)\ \ P^m(z, y)$$

Terbukti $P^{n+m}(x,y) = \sum_z P^n(x, z)\, P^m(z, y)$

Dengan diberikan fungsi transisi n langkah dari suatu rantai Markov, diharapkan dapat menggunakan fungsi ini untuk menentukan distribusi X_n yang berkaitan dengan distribusi awal π_0.

(i) Jika π_0 distribusi awal dari rantai Markov, maka :

$$P(X_n = y) = \sum_x P(X_0 = x, X_n = y)$$

$$= \sum_x P(X_n = y \mid X_0 = x)P(X_0 = x)$$

$$= \sum_x P^n(x, y)\pi_0(x)$$

(ii) $$P(X_{n+1} = y) = \sum_x P(X_n = x, X_{n+1} = y)$$

$$= \sum_x P(X_{n+1} = y \mid X_n = x)P(X_n = x)$$

$$= \sum_x P(x, y)P(X_n = x)$$

Perhatikan bahwa, jika kita mengetahui distribusi dari X_0, kita dapat menggunakan persamaan (ii) untuk mencari distribusi dari X_1. Dengan diketahuinya distribusi X_1, dapat digunakan untuk mencari distribusi dari X_2, dan seterusnya. Dengan cara serupa, kita dapat menggunakan persamaan (ii) untuk mencari distribusi X_n.

(iii) $P(X_{n+1}=x_{n+1}, \ldots, X_{n+m}=x_{n+m} \mid X_0=x_0, \ldots, X_n=x_n)$

$$= \frac{P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots X_{n+m} = x_{n+m})}{P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)}$$

$$= \frac{\pi_0(x)P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-1}, x_n)P(x_n, x_{n+1})\ldots P(x_{n+m-1}, x_{n+m})}{\pi_0(x)P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-1}, x_n)}$$

$$= P(x_n, x_{n+1})P(x_{n+1}, x_{n+2})\ldots P(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

Atau persamaan (iii) dapat dinyatakan sebagai :

$P(X_{n+1}=y_1, \ldots, X_{n+m}=y_m \mid X_0=x_0, \ldots, X_n=x_n) = P(x, y_1)\, P(y_1, y_2) \ldots P(y_{m-1}, y_m)$

3.6 MATRIKS TRANSISI

Misalkan sekarang, ruang state S berhingga. S={0,1,...,d}. Matriks transisi P dengan ukuran (d+1)x(d+1) diberikan oleh :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & \cdots & P(0,d) \\ P(1,0) & P(1,1) & \cdots & P(1,d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(d,0) & P(d,1) & \cdots & P(d,d) \end{bmatrix} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0d} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1d} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{d0} & p_{d1} & p_{d2} & \cdots & p_{dd} \end{bmatrix} \end{array}$$

Sedang matriks transisi 2 langkah diberikan oleh :

$P^2(x,y) = \sum_{z \in S} P(x,z)P(z,y)$; $S=\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$

$$P^2 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n \end{array}\begin{bmatrix} \sum_z P(x_0,z)P(z,x_0) & \sum_z P(x_0,z)P(z,x_1) & \cdots & \sum_z P(x_0,z)P(z,x_n) \\ \sum_z P(x_1,z)P(z,x_0) & \sum_z P(x_1,z)P(z,x_1) & \cdots & \sum_z P(x_1,z)P(z,x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_z P(x_n,z)P(z,x_0) & \sum_z P(x_n,z)P(z,x_1) & \cdots & \sum_z P(x_n,z)P(z,x_n) \end{bmatrix} = P.\,P$$

Matriks transisi m langkah dalam matriks dinyatakan sebagai :

$$P^{(m)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00}^{(m)} & p_{01}^{(m)} & p_{02}^{(m)} & p_{03}^{(m)} & \cdots \\ p_{10}^{(m)} & p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & p_{13}^{(m)} & \cdots \\ p_{20}^{(m)} & p_{21}^{(m)} & p_{22}^{(m)} & p_{23}^{(m)} & \cdots \\ p_{30}^{(m)} & p_{31}^{(m)} & p_{32}^{(m)} & p_{33}^{(m)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

Perhatikan bahwa dari persamaan (i) $P(X_n=y) = \sum_x P^n(x,y)\pi_0(x)$

Jika distribusi awal π_0 merupakan vektor baris dengan dimensi (d+1), yaitu :

$\pi_0 = (\pi_0(0), \pi_0(1,..., \pi_0(d))$

Maka diperoleh :

$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

Dengan π_n = $(P(X_0=0), P(X_0=1), \ldots , P(X_0=d))$ adalah vektor baris berukuran d+1.

Dari persamaan (ii) $P(X_{n+1},y) = \sum_x P(x,y)P(X_n = x)$, memberikan :

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

Contoh :

Diberikan rantai Markov dua state dengan matriks transisi $P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$;

p+q>0. Bila $\pi_0(0) = 1$ dan $\pi_0(1) = 0$

$$P(Xn=0)= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left[\pi_0(0) - \frac{q}{p+q}\right] = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

$$P(Xn=1)= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left(\pi_0(1) - \frac{p}{p+q}\right) = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

Maka diperoleh :

$$P^n(0,0) = P_0(X_n=0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

$$P^n(0,1 = P_0(X_n=1 = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

$$P^n(1,0) = P_1(X_n=0) = \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

$$P^n(1,1) = P_1(X_n=1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

Akhirnya diperoleh :

$$P^n = \frac{1}{p+q}\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}$$

Contoh 1 :

Diberikan rantai Ehrenfest dengan S={0,1,2,3} dan distribusi awal π_0 = (¼, ¼,¼,¼) dan matriks transisi P.

Maka :

$$\pi_1 = \pi_0\, P = (¼, ¼, ¼, ¼)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \pi_1\, P = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{36} & \frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \pi_1 P = \pi_0\, P^2 = (¼, ¼, ¼, ¼)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{36} & \frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

Contoh 2:

Diketahui rantai Markov dengan S={0,1,2} dan matriks transisi 1-langkah :

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Buktikan bahwa $P^4 = P^2$

$$P^2 = P\,P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^2\,P^2 = \begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix} = P^2$$

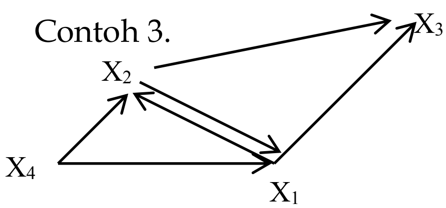
Terbukti $P^4 = P^2$

$$P^3 = P\,P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

Maka dapat dinyatakan bahwa :

$$P^n = \begin{cases} P;\ \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ P^2;\ \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Contoh 3.



Seandainya $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, tentukan nilai $P_{X4}(T_{X3} = 4)$!

$$P\begin{Bmatrix} X_4 \to X_1 \to X_2 \to X_1 \to X_3 \ \text{ atau} \\ X_4 \to X_1 \to X_2 \to X_1 \to X_3 \ \text{ atau} \\ X_4 \to X_1 \to X_2 \to X_1 \to X_3 \ \text{ atau} \\ X_4 \to X_1 \to X_2 \to X_1 \to X_3 \end{Bmatrix} = P(X_4, X_1)\, P_{X1}(T_{X3}=3)$$

$$P(X_4, X_2)\, P_{X2}(T_{X3}=3) = P\begin{cases} X_4 \to X_2 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \ \text{ atau} \\ X_4 \to X_2 \to X_1 \to X_1 \to X_3 \ \text{ atau} \\ X_4 \to X_2 \to X_2 \to X_1 \to X_3 \ \text{ atau} \\ X_4 \to X_2 \to X_2 \to X_2 \to X_3 \end{cases}$$

Jadi $P_{X4}(T_{X3}=4) = P(X_4, X_1)\, P_{X1}(T_{X3}=3) + P(X_4, X_2)\, P_{X2}(T_{X3}=3)$

3.7 SIFAT-SIFAT STATE DARI SUATU RANTAI MARKOV

State dalam rantai Markov mempunyai sifat berlainan, beberapa sifat state yang akan dipelajari diantaranya :

(i) State Absorbing
State ini mempunyai sifat $P(a,a)=1$

(ii) State Transien
Suatu state $y \in S$ disebut Transien jika $\rho_{yy} = P_y(T_y < \infty) < 1$

Ini berarti bahwa rantai Markov yang bermula dari y belum tentu (belum pasti) kembali ke-y. Ada kemungkinan tidak kembali ke-y dan P(dari y tidak kembali ke-y) =1-P(dari y kembali ke-y)

$=1-\rho_{yy} > 0$

(iii) State Rekuren

Suatu state $y \in S$ disebut rekuren, jika $\rho_{yy}=P_y(T_y<\infty)=1$

Ini berarti bahwa rantai Markov yang bermula dari y pasti akan kembali ke-y pada suatu waktu yang berhingga. Ingat bahwa :

$\rho_{xy}=P_x(T_y<\infty)$

mempunyai arti bahwa probabilitas rantai Markov bermula dari x akan mencapai y pada waktu berhingga

- Jika y state absorbing, maka y merupakan state rekuren. Ini dapat diperlihatkan berdasarkan kenyataan bahwa y state absorbing maka $P(y,y)=P_y(T_y=1)=1$
  Ini berarti bahwa $\rho_{yy}=1$, akibatnya y merupakan state rekuren
- Namun belum tentu berlaku kebalikannya

Dibentuk suatu fungsi indikator untuk himpunan {y} demikian :

$$I_y(z) = \begin{cases} 1; & z = y \\ 0; & z \neq y \end{cases}$$

Sedangkan N(y) menyatakan banyak kali rantai Markov berada pada state y. Karena $I_y(X_n)=1$ bila rantai pada state y atau $X_n=y$, dan $I_y(X_n)=0$ bila $X_n \neq y$ maka terdapat hubungan:

$$N(y)=\sum_{n=1}^{\infty} I_y(X_n)$$

Kejadian $\{N(y) \geq 1\}$ menyatakan banyak kali rantai Markov pada state y tidak kurang dari sekali, ini berarti sama dengan $\{T_y < \infty\}$, jadi:

$$\boxed{P_x(N(y)\geq 1)=P_x(T_y\leq\infty)=\rho_{xy}}$$

Seandainya m dan n bilangan bulat positif, maka probabilitas rantai Markov mulai dai x berkunjung pertama ke-y setelah m langkah= $P_x(T_y=m)$, dan kunjungan berikutnya ke-y setelah n langkah berikutnya memiliki probabilitas = $P_y(T_y=n)$, sehingga probabilitas rantai Markov mulai dari x berkunjung pertama ke-y setelah m langkah dan kunjungan berikutnya ke-y setelah n langkah berikutnya =

$$P_x(T_y=m).\ P_y(T_y=n)$$

Jadi :

(i) $P_x(N(y) \geq 2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_x(Ty = m).\, P_y(Ty = n)$

$$= \left[\sum_{m=1}^{\infty} P_x(Ty = m)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} P_y(Ty = n)\right] = \rho_{xy}\ \ \rho_{yy}$$

(ii) $P_x(N(y) \geq m) = \rho_{xy}\ \ \rho_{yy}^{m-1}$, $m \geq 1$

(iii) $P_x(N(y) = m) = P_x(N(y) \geq m) - P_x(N(y) \geq m+1)$

$$= \rho_{xy}\ \ \rho_{yy}^{m-1} - \rho_{xy}\ \ \rho_{yy}^{m}$$

$$= \rho_{xy}\ \ \rho_{yy}^{m-1}\ (1 - \rho_{yy}),\ m \geq 1$$

(iv) $P_x(N(y) = 0) = 1 - P_x(N(y) \geq 1)$

$$= 1 - \rho_{xy}$$

Dari (iii) $P_x(N(y) = m)$: probabilitas rantai mulai dari x mengunjungi y sebanyak m kali sama dengan probabilitas rantai mulai x mengunjungi y pertama kali kemudian kembali ke-y sebanyak (m-1) kali kemudian tak kembali lagi ke-y = $\rho_{xy}\ \ \rho_{yy}^{m-1}$ $(1 - \rho_{yy})$. Akan digunakan notasi $E_x(\ \ )$ untuk menyatakan harga harapan (*expectation*) suatu variabel acak terdefinisikan dalam rantai Markov mulai dari x. Berdasarkan contoh di atas :

(i) $E_x(I_y(X_n)) = 0.\, P_x(I_y(X_n)=0) + 1.\, P_x(I_y(X_n)=1)$

$$= 0.\, P_x(X_n \neq y) + 1.\, P_x(X_n = y)$$

$$= P_x(X_n = y) = P^n(x,y)$$

(ii) $E_x(N(y)) = E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_y(X_n)\right)$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_x\left(I_y(X_n)\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y)$$

Didefinisikan

$$G(x,y) = E_x(N(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y)$$

G(x,y) menyatakan harga harapan banyaknya kunjungan ke-y bila rantai Markov mulai dari x.

Teorema I

(i) Jika y state transien maka $P_x(N(y) < \infty) = 1$ dan $G(x,y) = \dfrac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}}$, $x \in S$

G(x,y) berhingga untuk semua $x \in S$

(ii) Jika y suatu state rekuren, maka $P_y(N(y) = \infty) = 1$ dan $G(x,y) = \infty$

$$P_x(N(y)=\infty)= P_x(T(y) < \infty)= \rho_{xy}\ , \ \ x\in S$$

Jika ρ_{xy} =0 maka G(x,y)=0, sedangkan jika ρ_{xy} > 0 maka G(x,y)=∞. Teorema I merupakan dasar untuk membedakan state transien dan rekuren. Jika y state transien, maka tidak pandang dari mana rantai Markov itu mulai, maka banyaknya kunjungan ke-y adalah berhingga. Bila y state rekuren, maka bila rantai Markov mulai dari y maka akan kembali ke-y tak terhingga kali. Bila rantai mulai dari x, x ≠ y, ada kemungkinan tak pernah singgah ke-y, tetapi bila sekali dapat singgah ke-y maka akan tak terhingga kali singgah ke-y.

Bukti :

(i) Untuk y state transien, karena $0 \le \rho_{yy} < 1$ maka:

$$P_x(N(y)=\infty)=\operatorname*{limit}_{m\to\infty} P_x(N(y) \ge m$$

$$= \operatorname*{limit}_{m\to\infty} \rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1} = \left(\operatorname*{limit}_{m\to\infty} \rho_{yy}^{m-1}\right)\rho_{xy} =0.\ \rho_{xy} =0$$

Note :

$$P_x(N(y)\ge\infty)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y = m)P_y(T_y = n)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y = m)\sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y = n)$$

$$= \rho_{xy}\ \rho_{yy}$$

Akibat $P_x(N(y) < \infty)= 1- P_x(N(y)=\infty)=1-0=1$

Pada sisi lain diperoleh :
$G(x,y)=E_x(N(y))$

$$=\sum_{m=1}^{\infty} m\, P_x(N(y) = m) = \sum_{m=1}^{\infty} m\, \{P_x(N(y) \ge m) - P_x(N(y) \ge m+1)\}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m\, \{\rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1} - \rho_{xy}\rho_{yy}^{m}\} = \sum_{m=1}^{\infty} m\, \rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1}\{1 - \rho_{yy}\}$$

$$=\rho_{xy}\{1 - \rho_{yy}\}\sum_{m=1}^{\infty} m\, \rho_{yy}^{m-1} = \rho_{xy}\{1 - \rho_{yy}\}\left[\frac{1}{(1-\rho_{yy})^2}\right] = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}$$

(Tugas I No. 1) Buktikan $\sum_{m=1}^{\infty} m\, \rho_{yy}^{m-1} = \frac{1}{(1-\rho_{yy})^2}$

(ii) Untuk y rekuren, maka ρ_{yy}=1

$$P_x(N(y)=\infty)=\lim_{m\to\infty} P_x(N(y)\geq m$$

$$=\lim_{m\to\infty} \rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1} = \left(\lim_{m\to\infty} \rho_{yy}^{m-1}\right)\rho_{xy} = 1.\ \rho_{xy} = \rho_{xy}$$

Keadaan khusus (x=y) maka $P_y(N(y)=\infty)=\rho_{yy}=1$.

Akibatnya $G(x,y)=E_x(N(y))=\infty$

Bila y state transien, $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) = G(x, y) < \infty$, untuk $x \in S$ maka $\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = 0$

Definisi

Suatu rantai Markov disebut rantai Transien jika semua state adalah transien.
Suatu rantai Markov disebut rantai Rekuren jika semua state adalah rekuren.

Rantai Markov dengan ruang state berhingga mempunyai paling sedikit satu state rekuren. Dengan demikian rantai Markov dengan state berhingga tidak mungkin merupakan rantai Transien.

Bukti :

S : state berhingga. Andaikan semua state transien, maka:

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = 0$$

Dengan demikian diperoleh hubungan :

$$0 = \sum_{y\in S} \lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in S} P^n(x, y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_x(X_n \in S) = \lim_{n\to\infty} 1$$

0 =1 (Terjadi kontradiksi)

Pengandaian harus diingkar, jadi jika S state berhingga, maka tidak mungkin merupakan rantai Transien.

3.8 DEKOMPOSISI RUANG STATE

Definisi

Misal $x,y \in S$ dan y tidak harus berbeda, x dikatakan menuju y jika $\rho_{xy} > 0$

Lemma

Misalkan x dan y state dalam S, x menuju y jika dan hanya jika $P^n(x,y)>0$ untuk semua bilangan bulat positif n.

Bukti :
Jika x menuju y maka $\rho_{xy} = P_x(T_y < \infty) > 0$, jadi terdapat n sehingga $P_x(T_y=n) >0$. Ini berarti $P^n(x,y)>0$. Sebaliknya jika $P^n(x,y)>0$ maka $P_x(T_y < \infty)>0$ atau $\rho_{xy} > 0$. Ini berarti x menuju y.

Teorema II

Jika x state rekuren dan menuju y, maka y rekuren dan $\rho_{xy} = \rho_{yx} = 1$.

Definisi-definisi (*irreducible*) :

(i) Suatu himpunan C yang tidak kosong dikatakan tertutup, jika tidak ada state dalam C menuju sembarang state di luar C, atau

$\rho_{xy} = 0$, $x \in S$ dan $y \notin S$

(ii) Himpunan C yang tidak kosong dikatakan tertutup, jika jika $P^n(x,y)=0$, $x \in C$, $y \notin C$, $n \geq 1$

Atau dapat pula didefinisikan (yang lebih lemah) : Himpunan C yang tidak kosong dikatakan tertutup, jika $P(x,y)=0$, $x \in C$, $y \notin C$.

Disini apabila C tertutup, maka rantai Markov bermula dari C akan selalu tinggal di C dengan probabilitas 1. Apabila a state absorbing, maka {a} adalah tertutup.

(iii) Himpunan tertutup C dikatakan *irreducible* jika untuk semua x dan y $\in$ C, x menuju y.

Akibat dari Teorema II , bila himpunan C tertutup *irreducible* maka setiap state dalam C adalah rekuren atau setiap state dalam C adalah transien

Corollary

Seandainya C suatu himpunan tertutup *irreducible* yang anggotanya rekuren, maka :

(i) $\rho_{xy} = 1$

(ii) $P_x(N(y) = \infty)= 1$

(iii) $G(x,y) = \infty$

Definisi

Suatu rantai Markov *irreducible* ialah suatu rantai dengan ruang state S yang *irreducible*, artinya rantai dengan setiap state menuju state yang lain

Rantai Markov seperti ini adalah transien atau rekuren. Dari collorary di atas dapat disimpulkan bahwa rantai Markov Rekuren *Irreducible* mencapai setiap state tak terhingga kali dengan probabilitas 1.

Teorema III

Diberikan C himpunan berhingga tertutup *irreducible*, maka tiap anggota C adalah rekuren.

Pandang suatu rantai Markov dengan banyaknya anggota (state) berhingga, Teorema III mengatakan bahwa rantai *irreducible* mesti rekuren. Bila rantai tidak *irreducible* dapat ditentukan state mana yang rekuren dan mana yang transien berdasarkan Teorema II dan Teorema III

Contoh

Pandang rantai Markov dengan matriks transisi sebagai berikut :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & y & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
x \;\; \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Tentukan state mana yang rekuren dan mana yang transien?

Langkah permulaan dicari state mana yang menuju state lain dalam rantai Markov ini. Dibuat suatu matriks dengan elemen + atau 0 tergantung state x apakah menuju y atau tidak, apakah $\rho_{xy} > 0$ atau $\rho_{xy} = 0$. Bila $P(x,y) > 0$ maka $\rho_{xy} > 0$ tetapi sebaliknya tidak benar, seandainya bila $P(2,0) = 0$ tetapi $P^2(2,0) = P(2,1)$. $P(1,0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} > 0$ maka $\rho_{20} > 0$, terdapatlah matriks :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \end{bmatrix}$$

State 0 adalah absorbing, maka state 0 adalah rekuren. Dari matriks "+, 0" itu kelihatan bahwa state {3, 4, 5} adalah tertutup *irreducible*, maka menurut Teorema III state {3, 4, 5} adalah state rekuren. State 1 dan 2 kedua-duanya menuju 0, tetapi kedua-duanya tidak dapat dicapai dari state 0. Berdasarkan Teorema II maka state {1, 2} adalah state transien. Maka dapat disimpulkan bahwa state 0, 3, 4, 5 adalah rekuren dan state 1, 2 adalah transien.
Bila S_T menyatakan himpunan semua state transien dan S_R menyatakan himpunan semua state rekuren, maka dari contoh di atas S_T = {1, 2} dan S_R={0, 3, 4, 5}. S_R dapat dipecah menjadi himpunan-himpunan yang saling asing dan masing-masing tertutup irreducible, yaitu C_1={0} dan C_2={3, 4, 5}.

Teorema IV

Seandainya himpunan S_R tidak kosong, maka $S_R=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$. n berhingga atau tak terhingga *countable*, sedang C_i himpunan tertutup *irreducible* dan $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Bukti:

Pilih $x \in S_R$ dan seandainya C himpunan state $y \in S_R$ sedemikian hingga x menuju y. Karen x rekuren maka ρ_{xx}=1, sehingga $x \in C$. Akan dibuktikan bahwa x tertutup *irreducible*. Seandainya $y \in C$ dan y menuju z, karena y rekuren maka z juga rekuren. Karena x menuju y dan y menuju z maka x menuju z, jadi $z \in C$, ini berarti C tertutup.

Bila y dan z $\in$C, karena x rekuren dan menuju y, maka y menuju x. Karena y menuju x dan x menuju z, maka y menuju z, ini membuktikan bahwa C irreducible.

Bila C dan D dua himpunan tertutup *irreducible* $\subset S_R$, maka C dan D saling asing atau identik. Seandainya C dan D tidak saling asing, ada $x \in C \cap D$. Misal $y \in C$, x menuju y, karena $x \in C$ dan C *irreducible*. Karena D tertutup, $x \in D$ dan x menuju y, maka $y \in D$. Maka setiap $y \in C \rightarrow y \in D$, juga sebaliknya dapat dibuktikan setiap $z \in D \rightarrow z \in C$, sehingga dapat disimpulkan C identik dengan D.
(Bukti Lengkap)

Dekomposisi ruang state S suatu rantai Markov dapat digunakan untuk mempelajari sifat sistem itu. Jika rantai Markov mulai dari salah satu himpunan tertutup *irreducible* C_i yang anggota-anggotanya rekuren, maka rantai tak pernah keluar dari C_i dengan probabilitas 1, dan mengunjungi setiap state dalam C_i tak terhingga kali.

Jika rantai Markov mulai dari state transien S_T, maka rantai akan tetap di dalam S_T atau suatu ketika masuk dalam C_i dan tinggal di sana seterusnya dan mengunjungi setiap anggota C_i tak terhingga kali.

Probabilitas Absorbsi

Seandainya C salah satu himpunan tertutup *irreducible* dengan anggota state rekuren, dan $\rho_c(x)=P_x(T_C < \infty)$ yaitu probabilitas bahwa rantai Markov mulai dari x dan mungkin mencapai C, karena rantai akan tetap tinggal di C setelah rantai sekali mencapai C. $\rho_c(x)$ disebut probabilias rantai mulai dari x diserap (absorbed) oleh himpunan C. Jelasnya $\rho_c(x)=1$, $x \in C$ dan $\rho_c(x) = 0$, jika x state rekuren di luar C ($x \notin C$). Bila $x \in S_T$, x state transien, maka untuk menghitung $\rho_c(x)$ agak sulit. Bila S_T berhinga, dan khususnya S sendiri berhingga, maka mungkin untuk mencari $\rho_c(x)$, $x \in S_T$, dengan menyelesaikan sistem persamaan linear dengan banyaknya persamaan sama dengan banyaknya variabel yang tidak diketahui. Misal $x \in S_T$, rantai mulai dari x masuk ke-C pada langkah pertama atau tetap tinggal di S_T pada langkah pertama dan masuk ke C pada langkah kemudian. Probabilitas keadaan pertama, yaitu probabilitas rantai mulai dari x masuk ke-C pada langkah pertama = $\sum_{y \in C} P(x, y)$. Sedangkan probabilitas keadaan kedua = $\sum_{y \in S_T} P(x, y)\rho_c(y)$

Jadi terdapat $\rho_c(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} P(x, y)\rho_c(y)$, $x \in S_T$

Pada persamaan ini, bila S_T tak berhingga, agak susah mencari penyelesaian persamaannya.

Teorema V

Seandainya S_T himpunan state transien dan berhingga dan C himpunan tertutup *irreducible* yang anggotanya state rekuren. Maka sistem persamaan :

$$f(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} P(x, y) f(y), \quad x \in S_T$$

mempunyai penyelesaian tunggal $\mathbf{f(x)=\rho_c(x)}$; $x \in S_T$

Bukti :

Bila sistem persamaan $f(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} P(x, y) f(y)$, $x \in S_T$ berlaku

Maka:

$$f(y) = \sum_{z\in C} P(y,z) + \sum_{z\in S_T} P(y,z)\, f(z)\ ,\ z\in S_T$$

$$f(x) = \sum_{y\in C} P(x,y) + \sum_{y\in S_T} P(x,y)\left[\sum_{z\in C} P(y,z) + \sum_{z\in S_T} P(y,z)\, f(z)\right]$$

$$= \underbrace{\sum_{y\in C} P(x,y) + \sum_{y\in S_T}\sum_{z\in C} P(x,y)P(y,z)}_{P_x(T_C \le 2)} + \underbrace{\sum_{y\in S_T}\sum_{z\in S_T} P(x,y)\, P(y,z)\, f(z)}_{\sum_{z\in S_T} P^2(x,z) f(z)}$$

$$f(x) = P_x(T_C \le 2) + \sum_{z\in S_T} P^2(x,z) f(z)$$

Dengan menggunakan induksi akan terdapat :

$$f(x) = P_x(T_C \le n) + \sum_{z\in S_T} P^n(x,z) f(z) \qquad ;\ x\in S_T$$

Karena setiap $y\in S_T$ adalah transient, maka $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0$ untuk $x\in S$ dan $y\in S_T$. Sesuai dengan anggapan bahwa S_T berhingga, maka untuk $x\in S_T$ terdapatlah

$$\boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} P_x(T_C \le n) = P_x(T_C < \infty) = \rho_C(x)}$$

(teorema V terbukti)

Contoh

Pada contoh di atas, rantai Markov mempunyai matriks transisi :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Tentukan nilai dari $\rho_{10} = P_1(T_0 < \infty) = \rho_{\{0\}}(1)$

Penyelesaian:

Dari persamaan $\rho_c(\mathrm{x}) = \sum_{y \in C} \mathrm{P(x, y)} + \sum_{y \in S_T} \mathrm{P(x, y)} \rho_c(\mathrm{y})$, $x \in S_T$ dan telah ditemukan bahwa $S_T=\{1, 2\}$; $S_R=\{0,3, 4, 5\}$; $C_1=\{0\}$ dan $C_2=\{3, 4, 5\}$

$\rho_{10} = \rho_{\{0\}}(1) = \sum_{y \in \{0\}} \mathrm{P(x, y)} + \sum_{y \in \{1,2\}} \mathrm{P(x, y)} \rho_{\{0\}}(\mathrm{y})$; $x \in \{1, 2\}$

$\rho_{\{0\}}(1) = P(1,0) + P(1,1)\, \rho_{\{0\}}(1) + P(1,2)\, \rho_{\{0\}}(2)$

$\rho_{\{0\}}(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \rho_{\{0\}}(1) + \frac{1}{4} \rho_{\{0\}}(2)$

atau $\frac{1}{2} \rho_{\{0\}}(1) - \frac{1}{4} \rho_{\{0\}}(2) = \frac{1}{4} \equiv 2 \rho_{10} - \rho_{20} = 1$

$\rho_{\{0\}}(2) = P(2,0) + P(2,1)\, \rho_{\{0\}}(1) + P(2,2)\, \rho_{\{0\}}(2)$

$\rho_{\{0\}}(2) = 0 + \frac{1}{5} \rho_{\{0\}}(1) + \frac{2}{5} \rho_{\{0\}}(2)$

atau $\frac{1}{5} \rho_{\{0\}}(1) - \frac{3}{5} \rho_{\{0\}}(2) = 0 \equiv \rho_{10} - 3\rho_{20} = 0$

Dari sistem persamaan :

$$\left.\begin{aligned} 2\rho_{10} - \rho_{20} &= 1 \\ \rho_{10} - 3\rho_{20} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{10} \\ \rho_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh :

$$\begin{pmatrix} \rho_{10} \\ \rho_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Jadi nilai $\rho_{10} = \frac{3}{5}$ dan $\rho_{20} = \frac{1}{5}$

2. Dari contoh di atas, tentukan nilai :

   a. $\rho_{\{3,4,5\}}(1)$ b. $\rho_{\{3,4,5\}}(2)$

   Penyelesaian :

   a. $\rho_{\{3,4,5\}}(1) = \sum_{y \in \{3,4,5\}} \mathrm{P(1, y)} + \sum_{y \in \{1,2\}} \mathrm{P(1, y)} \rho_{\{3,4,5\}}(\mathrm{y})$

   $\rho_{\{3,4,5\}}(1) = P(1,3)+P(1,4)+P(1,5)+P(1,1)\, \rho_{\{3,4,5\}}(1)+P(1,2)\, \rho_{\{3,4,5\}}(2)$

   $\rho_{\{3,4,5\}}(1) = 0+0+0+ \frac{1}{2} \rho_{\{3,4,5\}}(1) + \frac{1}{4} \rho_{\{3,4,5\}}(2)$

   $\frac{1}{2} \rho_{\{3,4,5\}}(1) - \frac{1}{4} \rho_{\{3,4,5\}}(2) = 0 \Leftrightarrow \rho_{\{3,4,5\}}(2) = 2\, \rho_{\{3,4,5\}}(1)$ …. (*)

b. $\rho_{\{3,4,5\}}(2) = \sum_{y\in\{3,4,5\}} P(2,y) + \sum_{y\in\{1,2\}} P(2,y)\rho_{\{3,4,5\}}(y)$

$\rho_{\{3,4,5\}}(2)=P(2,3)+P(2,4)+P(2,5)+P(2,1)\ \rho_{\{3,4,5\}}(1)+P(2,2)\ \rho_{\{3,4,5\}}(2)$

$\rho_{\{3,4,5\}}(2)= \frac{1}{5}+0+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\ \rho_{\{3,4,5\}}(1)+\frac{2}{5}\ \rho_{\{3,4,5\}}(2)$

$\frac{3}{5}\rho_{\{3,4,5\}}(2) - \frac{1}{5}\ \rho_{\{3,4,5\}}(1)= \frac{2}{5}$ .... (**)

Substitusi (*) ke (**)

$\frac{3}{5}.2\ \rho_{\{3,4,5\}}(1) - \frac{1}{5}\ \rho_{\{3,4,5\}}(1)= \frac{2}{5} \Leftrightarrow \rho_{\{3,4,5\}}(1)= \frac{2}{5}$ dan $\rho_{\{3,4,5\}}(2)= \frac{4}{5}$

Jadi $\rho_{\{3,4,5\}}(1)= \frac{2}{5}$ dan $\rho_{\{3,4,5\}}(2)= \frac{4}{5}$

Sekali rantai Markov mulai pada $x\in S_T$ dan masuk pada C himpunan tertutup irreducible yang anggotanya state rekuren, maka rantai itu akan mengunjungi setiap state dalam C, jadi :

$\rho_{xy} = \rho_c(x)$, $x\in S_T$ dan $y\in C$

Maka dari contoh di atas $\rho_{23} = \rho_{\{3,4,5\}}(2) = \frac{4}{5}$

Latihan (Tugas 2.)

1. Diketahui rantai Markov dengan S = {0,1,2,3,4,5} dan matriks transisi P berikut :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \end{array}$$

Tentukan :

b. State yang transien

c. Hitunglah $\rho_{\{0,1\}}(3)$

2. Pandang suatu rantai Markov dengan ruang state S={0,1,2,...} dan diketahui $P_x(x+1)=p$, $0< p <1$; $P_x(0)=1-p$. Hitunglah $P_0(T_0 =n)$, $n\geq 1$

3. Suatu rantai Markov mempunyai ruang ruang state S={0,1,2,,3,…,2d} dan fungsi transisi :
$$P(x,y) = \binom{2d}{y}\left(\frac{x}{2d}\right)^{y}\left(1-\frac{x}{2d}\right)^{2d-y}$$
Tentukan $\rho_{\{0\}}(x)$, untuk 0<x<2d

4. Pandang rantai Markov dengan ruang state S={0,1,…} dan fungsi transisi :
$$P(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2(x+1)} & \text{, untuk } y = x+1\\[2ex] \dfrac{x}{2(x+1)} & \text{, untuk } y = x-1\end{cases}$$
Tentukan S_T …..

5. X_n, $n \geq 0$ suatu rantai Markov dengan S={0,1,2,3}dan matriks transisi
$$P = \begin{array}{c} \\ 0\\ 1\\ 2\\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2/5 & 3/5 & 0\\ 4/5 & 0 & 1/5 & 0\\ 4/5 & 3/20 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}\end{array}$$

Hitung $P(x_5=2,x_6=0,x_7=2,x_8=2|x_9=1)$!

3.9 HITTING TIME

Misalkan $A \subset S$. Hitting Time (Waktu Tunggu/Waktu sampai kena) T_A dari A didefinisikan sebagai :
$$T_A = \begin{cases}\text{Min}(n > 0; X_n \in A); \text{jika } X_n \in A, n > 0\\ \infty \qquad ; \text{jika } X_n \notin A, n > 0\end{cases}$$

Dengan perkataan lain, T_A adalah waktu positif pertama rantai Markov sampai di A.

Persamaan penting yang berkaitan dengan fungsi transisi n langkah dan hitting time.

Teorema

Jika $P^n(x,y)$ fungsi transisi n langkah dari suatu rantai Markov, maka :

$$P^n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m)P^{n-m}(y,y); \qquad n \geq 1$$

Bukti :

Perhatikan bahwa kejadian-kejadian : $\{T_y=m, X_n=y\}$, $1 \leq m \leq n$ merupakan kejadian-kejadian yang saling asing.

$$\{X_n=y\} = \{T_y=1, X_n=y\} \cup \{T_y=2, X_n=y\} \cup \ldots \cup \{T_y=n, X_n=y\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{T_y = m, X_n = y\}$$

$$P^n(x,y) = P_x(X_n=y) = P_x\left[\bigcup_{m=1}^{n} \{T_y = m, X_n = y\}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m, X_n = y)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m)P(X_n = y \mid X_0 = x, T_y = m)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m)P(X_n = y \mid X_0 = x, X_1 \neq y, X_2 \neq y, \ldots, X_{m-1} \neq y, X_m = y)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m)P^{n-m}(y,y)$$

Berikut diberikan suatu hubungan antara state absorbing dengan hitting time.

Lemma

Jika a suatu state absorbing, maka $P^n(x,a)=P_x(T_a < n)$, $n \geq 1$

Bukti:

Jika a state absorbing, maka $P^n(a,a)=1$; $1 \leq m \leq n$

Berdasarkan teorema di atas, (untuk y=a), didapat :

$$P^n(x,a) = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a = m)P^{n-m}(a,a)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a = m)$$

$$= P_x(T_a \leq n)$$

Perhatikan bahwa :

$$P_x(T_y=1)=P_x(X_1=y)=P(x,y)$$

$$P_x(T_y=2)= \sum_{z \neq y} P_x(X_1 = z, X_2 = y)$$

$$= \sum_{z \neq y} P(x,z)P(z,y)$$

Untuk n yang lebih besar digunakan formula :

$$P_x(T_y = n+1) = \sum_{z \neq y} P(x,z)P_z(T_y = n) \quad ; n \geq 1$$

Formula tersebut dapat diinterpretasikan sebagai berikut :
$P_x(T_y=n+1)$ merupakan probabilitas rantai Markov mulai dari x mencapai y paling sedikit dalam n+1 langkah. Hal ini sama dengan rantai mulai dari x mencapai z dalam satu langkah dan dari z mencapai y dalam n langkah, asalkan $z \neq y$.

3.10 Distribusi Stasioner dari Suatu Rantai Markov

Misalkan X_n, $n \geq 0$ merupakan rantai Markov dengan state space S dan fungsi transisi P. Jika $\pi(x)$, $x \in S$ merupakan bilangan positif yang jumlahnya sama dengan satu, dan berlaku :

$$\boxed{\sum_x \pi(x)\, P(x, y) = \pi(y) \ \ , y \in S}$$

Maka π disebut distribusi stationary (*Stationary Distribution*)

Seperti kita lihat pada pembahasan-pembahasan sebelumnya, untuk menentukan suatu distribusi dari X_n, sangat ditentukan oleh distribusi awal dari suatu rantai tersebut. Apabila distribusi awal diberikan, akan memungkinkan untuk memperoleh distribusi dari suatu X_n. Pada pembahasan disini, distribusi X_n akan ditentukan tanpa memperhitungkan sutu distribusi awal rantai tersebut, khususnya n yang cukup besar ($n \to \infty$).

Misalkan suatu distribusi stasionary π ada dan memenuhi:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} it\, P^n(x, y) = \pi(y), \ y \in S}$$

Berdasarkan sifat ini akan diselidiki distribusi dari suatu X_n, $n \to \infty$, akan mendekati π. Distribusi π ini sering disebut Distribusi Steady State (*Steady State Distribution*).

Pertama harus diperhatikan dahulu sifat-sifat yang dimiliki oleh *Stationary Distribution*.

Lemma 3.8.1

Jika π suatu distribusi stasioner, maka

$$\boxed{\sum_x \pi(x)\, P^2(x, y) = \pi(y) \ \ , y \in S}$$

Bukti :

Karena π suatu distribusi stasioner, maka mempunyai sifat bahwa :

$$\sum_{x} \pi(x)\, P(x, y) = \pi(y) \quad , y \in S$$

Pada sisi lain didapat :

$$\begin{aligned}
\sum_{x} \pi(x)\, P^2(x, y) &= \sum_{x} \pi(x) \left(\sum_{z} P(x, z) P(z, y) \right) \\
&= \sum_{z} \left(\sum_{x} \pi(x) P(x, z) \right) P(z, y) \\
&= \sum_{z} \pi(z) P(z, y) \\
&= \pi(y)
\end{aligned}$$

Sifat distribusi stasioner dalam lemma di atas dapat digeneralisasi untuk sembarang bilangan positif $n \geq 2$. Sifat generalisasi diberikan oleh teorema berikut yang pembuktiannya dengan induksi dan mendasarkan pada hubungan :

$$P^{n+1}(x, y) = \sum_{z} P^n(x, z) P(z, y)$$

Teorema 3.8.1

Jika π merupakan distribusi stasioner dan $P^n(x,y)$ menyatakan fungsi transisi n langkah dari suatu state x ke state y, maka :

$$\boxed{\sum_{x} \pi(x)\, P^n(x, y) = \pi(y) \quad , y \in S}$$

Distribusi stasioner disebut juga Distribusi Jangka Panjang (*limiting distribution*) dari suatu Rantai Markov.

Jika suatu rantai Markov $\{X_n\}$ dengan matriks transisi P dengan N+1 state $\{0,1,2, \ldots,N\}$ akan diperoleh SPL :

$$\pi_i = \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{ki}$$

Dan $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_N = 1$, dan $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N)$ disebut distribusi jangka panjang (*limiting distribution*) dari proses Markov.

Contoh :

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka diperoleh SPL :

$(1-a)\,\pi_0 + \quad b\,\pi_1 = \pi_0$

$a\,\pi_0 + (1-b)\,\pi_1 = \pi_1$

Dan $\pi_0 + \pi_1 = 1$

Dengan menyelesaikan SPL tersebut diperoleh $\pi = (\pi_0, \pi_1)$

$\pi_0 = b/(a+b)$ dan $\pi_1 = a/(a+b)$

Latihan :

Tentukan distribusi jangka panjang dari matriks-matriks transisi berikut:

a.
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

b.
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c.
$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \end{array}$$

3.11 Teori Keputusan Markov (*Expected Average Cost* Per Unit Time)

Sebelumnya telah dibahas, agar limit probabilitas (kondisi steady state) ada, maka ruang state dari rantai Markov harus merupakan ruang state berhingga (*irreducible, positif recurrent*), yaitu :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{k}\right\} = \pi_j$$

Dimana π_j memenuhi persamaan steady state. Sifat ini sangat penting dalam menghitung biaya rata-rata tiap unit daru rantai Markov jangka panjang. Misal timbul biaya $C(X_t)$ bila proses pada state X_t, pada waktu t, untuk t = 0, 1, 2, …
Dalam hal ini $C(X_t)$ adalah variable acak yang dapat bernilai salah satu dari C(0), C(1), …, C(M) dan fungsi C(0) adalah independen dari t. Ekspektasi biaya rata-rata yang timbul dalam n periode dapat dinyatakan sebagai :

$$E\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right\}$$

Dengan menggunakan hasil bahwa :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{k}\right\} = \pi_j$$

Maka dapat dibuktikan bahwa dalam jangka panjang tiap periode adalah :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right)\right\} = \sum_{j=0}^{M} C(j)\pi_j$$

Contoh:
Sebuah took menjual kamera dan mengambilnya dari seorang distributor pada tiap akhir minggu. Andaikan D_i menunjukkan demand pada minggu ke-I dan diasumsikan masing-masing berdistribusi Poisson dengan $\lambda = 1$. Toko tersebut menggunakan sistem inventori (s, S), yaitu jika pada minggu tertentu jumlah kamera kurang dari 1 (s < 1) maka took tersebut mengorder 3 kamera dari distributor (S= 3) pada akhir minggu tersebut. Jika s ≥ 1 maka tidak ada pengorderan.
Misalkan :

X_0 = jumlah kamera mula-mula = 3
X_1 = jumlah kamera pada akhir minggu pertama
X_2 = jumlah kamera pada akhir minggu kedua
…… dst …..

Jadi $\{X_n \ ; \ n \in (0, 1, 2, \ldots)\}$ merupakan rantai Markov berparameter diskret. Sebagai ruang statenya adalah S = {0, 1, 2, 3} yang menunjukkan jumlah kamera di toko tersebut pada minggu tertentu. Diperoleh hubungan :

$$X_{n+1} = \begin{cases} \max\{(3 - D_{n+1}), 0\}; bila\ X_n < 1 \\ \max\{(X_n - D_{n+1}), 0\}; bila\ X_n \geq 1 \end{cases}$$

Selanjutnya dapat dihitung :

$P_{00} = P[X_{n+1}=0 \mid X_n=0] = P[D_n \geq 3] = \frac{e^{-1}1^3}{3!} = \frac{1}{6e} \cong 0{,}08$

$P_{01} = P[X_{n+1}=1 \mid X_n=0] = P[D_n = 2] = \frac{e^{-1}1^2}{2!} = \frac{1}{2e} \cong 0{,}184$

$P_{02} = P[X_{n+1}=2 \mid X_n=0] = P[D_n = 1] = \frac{e^{-1}1^1}{1!} = \frac{1}{e} \cong 0{,}368$

$P_{03} = P[X_{n+1}=3 \mid X_n=0] = P[D_n = 0] = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = \frac{1}{e} \cong 0{,}368$

$P_{10} = P[X_{n+1}=0 \mid X_n=1] = P[D_n \geq 1] = 1 - \frac{1}{e} = 1 - 0{,}368 \cong 0{,}632$

….. dst….

Diperoleh matriks probabilitas transisi satu langkah :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \\ 0{,}632 & 0{,}368 & 0 & 0 \\ 0{,}264 & 0{,}368 & 0{,}368 & 0 \\ 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{bmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan persamaan Chapman – Kolmogorov diperoleh :

$$P^2 = P.P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}249 & 0{,}289 & 0{,}310 & 0{,}165 \\ 0{,}283 & 0{,}252 & 0{,}233 & 0{,}233 \\ 0{,}351 & 0{,}319 & 0{,}233 & 0{,}097 \\ 0{,}249 & 0{,}286 & 0{,}300 & 0{,}165 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P^4 = P^2.P^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \\ 0{,}282 & 0{,}285 & 0{,}268 & 0{,}166 \\ 0{,}284 & 0{,}284 & 0{,}263 & 0{,}171 \\ 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dalam kondisi tertentu ingin dihitung $P[X_n = j]$. Itu itu diperlukan kondisi awal yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\pi_i^{(0)} = P[X_0 = i]; \ \forall\, i \forall$$

Karena dari contoh di atas diketahui jumlah kamera yang ada di toko mula-mula $X_0 = 3$ maka kondisi awal contoh di atas adalah :

$$\pi_0^{(0)} = \pi_1^{(0)} = \pi_2^{(0)} = 0 \;\; dan \; \pi_3^{(0)} = 1$$

$$\begin{aligned} P[X_n = j] &= \sum_i P[X_n = j\,, X_0 = i] = \sum_i P[X_n = j \,|X_0 = i]\pi_i^{(0)} \\ &= \pi_0^{(0)} P_{0j}^{(n)} + \pi_1^{(0)} P_{1j}^{(n)} + \pi_2^{(0)} P_{2j}^{(n)} + \cdots + \pi_n^{(0)} P_{nj}^{(n)} + \cdots \end{aligned}$$

Dari contoh di atas, ingin dihitung $P[X_2 = 3] = \ldots.$
Maka diperoleh :

$$\begin{aligned} P[X_2 = 3] &= \pi_0^{(0)} P_{03}^{(2)} + \pi_1^{(0)} P_{13}^{(2)} + \pi_2^{(0)} P_{23}^{(2)} + \pi_3^{(0)} P_{33}^{(2)} \\ &= 0 + 0 + 0 + 1.\ (0{,}165) = 0{,}165 \end{aligned}$$

Secara Umum :

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$$

Didefinisikan vektor probabilitas state $\pi^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \pi_3^{(n)}, \ldots]$

Diperoleh : $\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$

Secara matriks :

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

Menggunakan contoh di atas, maka diperoleh :

$$\pi^{(0)} = [\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}] = [0,0,0,1]$$

$$\pi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \\ 0{,}632 & 0{,}368 & 0 & 0 \\ 0{,}264 & 0{,}368 & 0{,}368 & 0 \\ 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{bmatrix}$$

$$\pi^{(1)} = [\pi_0^{(1)}, \pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{bmatrix}$$

Ini memperlihatkan, misal $\pi_3^{(1)} = 0{,}368$ menyatakan bahwa probabilitas terdapat 3 kamera di toko tersebut minggu depan adalah 0,368.

$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)} P = \pi^{(0)} P^2$$

$$\pi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}249 & 0{,}289 & 0{,}310 & 0{,}165 \\ 0{,}283 & 0{,}252 & 0{,}233 & 0{,}233 \\ 0{,}351 & 0{,}319 & 0{,}233 & 0{,}097 \\ 0{,}249 & 0{,}286 & 0{,}300 & 0{,}165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}249 & 0{,}286 & 0{,}300 & 0{,}165 \end{bmatrix}$$

Interpretasi :

i) Probabilitas terdapat nol kamera pada minggu kedua adalah 0,249 atau 24,9 % inventori nol kamera pada minggu kedua

ii) 28,6% inventori 1 kamera pada minggu kedua

iii) 30,0% inventori 2 kamera pada minggu kedua

iv) 16,5% inventori 3 kamera pada minggu kedua

Berikutnya, dari matriks probabilitas transisi P pada contoh di atas,jika dicari matriks $P^8 = P^4 . P^4$

$$P^8 = P^4 . P^4 = \begin{bmatrix} 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \\ 0{,}282 & 0{,}285 & 0{,}268 & 0{,}166 \\ 0{,}284 & 0{,}284 & 0{,}263 & 0{,}171 \\ 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \\ 0{,}282 & 0{,}285 & 0{,}268 & 0{,}166 \\ 0{,}284 & 0{,}284 & 0{,}263 & 0{,}171 \\ 0{,}289 & 0{,}286 & 0{,}261 & 0{,}164 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 \\ 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 \\ 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 \\ 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}286 \end{bmatrix}$$

Semua elemen matriks bernilai sama, artinya probabilitas proses dalam state setelah 8 minggu cenderung independen dari kondisi awal. Demikian seterusnya, jika dihitung P^9, P^{10}, …, akan diperoleh matriks yang sama, artinya proses mencapai *steady state i*(Probabilitas jangka panjang rantai Markov). Dengan menggunakan persamaan di atas :

$$P_{00}\pi_0 + P_{10}\pi_1 + P_{20}\pi_2 + P_{30}\pi_3 = \pi_0$$
$$P_{01}\pi_0 + P_{11}\pi_1 + P_{21}\pi_2 + P_{31}\pi_3 = \pi_1$$
$$P_{02}\pi_0 + P_{12}\pi_1 + P_{22}\pi_2 + P_{32}\pi_3 = \pi_2$$
$$P_{03}\pi_0 + P_{13}\pi_1 + P_{23}\pi_2 + P_{33}\pi_3 = \pi_3$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \\ 0{,}632 & 0{,}368 & 0 & 0 \\ 0{,}264 & 0{,}368 & 0{,}368 & 0 \\ 0{,}080 & 0{,}184 & 0{,}368 & 0{,}368 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0{,}080\,\pi_0 + 0{,}632\,\pi_1 + 0{,}264\,\pi_2 + 0{,}080\,\pi_3 &= \pi_0 \\ 0{,}184\,\pi_0 + 0{,}368\,\pi_1 + 0{,}368\,\pi_2 + 0{,}184\,\pi_3 &= \pi_1 \\ 0{,}368\,\pi_0 + 0 \quad\quad + 0{,}368\,\pi_2 + 0{,}368\,\pi_3 &= \pi_2 \\ 0{,}368\,\pi_0 + 0 \quad\quad + 0 \quad\quad + 0{,}368\,\pi_3 &= \pi_3 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Diperoleh $\pi_0 = 0{,}286$; $\pi_1 = 0{,}285$; $\pi_2 = 0{,}264$; $\pi_3 = 0{,}166$ yang merupakan unsur-unsur dari matriks P^8. Jadi setelah beberapa minggu yang cukup lama, probabilitas mendapatkan 0, 1, 2, dan 3 kamera berturut-turut adalah 0,286 ; 0,285; 0,264 dan 0,166

Expected recurrence time : $\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$;

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{0{,}286} = 3{,}51 \ minggu$$
$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{0{,}285} = 3{,}51 \ minggu$$
$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{0{,}264} = 3{,}79 \ minggu$$
$$\mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = \frac{1}{0{,}166} = 6{,}02 \ minggu$$

Andaikan pada akhir minggu ada kamera yang belum laku terjual, maka ada biaya peneliti sebagai berikut : jika X_t= 0 maka C(0)=0; jika X_t = 1 maka C(1)=2; jika X_t = 2 maka C(2) = 8; jika X_t = 3 maka C(3) = 18. Dalam jangka panjang, ekspektasi biaya tiap minggu adalah:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ E\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} C(X_t) \right) \right\} = \sum_{j=0}^{M} C(j)\pi_j$$
$$= 0\,(0{,}286) + 2(0{,}285) + 8(0{,}264) + 18(0{,}166) = 5{,}67$$

Latihan Rantai Markov

1. Suatu proses Markov $X_0, X_1, X_2, \ldots$ dengan matriks peluang transisi sebagai berikut :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Tentukan peluang untuk :

a. $P(X_2 = 1, X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$

b. $P(X_3 = 1, X_2 = 1 \mid X_1 = 0)$

c. $P(X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 0 \mid X_0 = 0)$

d. Jika diketahui proses berawal dari $X_0 = 1$, tentukan

(i) $P(X_2 = 1)$

(ii) $P(X_2 = 1, X_1 = 1)$

2. Diketahui rantai Markov X_n , $n \geq 0$ dengan State Space S = {a, b, c} dan matriks peluang transisinya :

$$P = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bila distribusi awal $\pi_0 = (2/5, 1/5, 2/5)$, hitung :

a. $P(X_0 = b, X_1 = b, X_2 = a)$

b. $P(X_1 = b, X_2 = b, X_3 = a)$

c. $P(X_1 = a, X_2 = c, X_3 = c, X_4 = a, X_5 = b)$

(*30*)

3. Untuk $a \in [0,1]$, suatu proses Markov dengan state 0, 1, 2, 3 memiliki matriks peluang transisi sebagai berikut :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-a \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{Vmatrix} \end{array}$$

Tunjukkan apakah proses Markov bersifat irreducible ? Jika irreducible, tentukan distribusi jangka panjang proses Markov tersebut!

4. Tentukan sifat-sifat state dari proses Markov dengan S={0,1,2,3} dan matriks peluang transisinya sebagai berikut :

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \end{array}$$

Bila ada, hitung semua peluang absorbsi dari Proses Markov di atas!

BAB IV
PROSES POISSON

Kompetensi Dasar : Mahasiswa mampu menguraikan tentang Proses Poisson

Tujuan Pembelajaran :

1. Memahami tentang Proses Poison
2. Menguasai distribusi-distribusi yang berhubungan dengan Proses Poisson
3. Menguasai aplikasi Proses Poisson dan Kehidupan Real

Pada pembahasan terdahulu kita telah membicarakan suatu Proses Stokastik dengan ruang state S yang diskrit dan parameter diskrit. Pada pembahasan berikut, kita akan membicarakan Proses Stokastik dengan ruang state S yang diskrit dan parameter kontinu. Salah satu contoh proses stokastik ini adalah Proses Poisson

Model proses stokastik semacam ini sangat penting, dari sudut pandang teori juga mempunyai banyak aplikasi yang mengikuti model tersebut, misalnya :

(i) Banyaknya pengunjung pada sebuah swalayan
(ii) Banyaknya kecelakaan lalu lintas pada suatu jalan, di sebuah kota
(iii) Banyak telpon berdering pada suatu interval waktu tertentu, dll

Proses Poisson merupakan suatu model stokastik yang pembentukannya didasarkan pada distribusi Poisson dan sifat-sifat keindependenannya. Pertama-tama akan diuraikan distribusi Poisson dan beberapa sifat pentingnya.

4.1. Distribusi Poisson

Suatu variable random X dikatakan mempunyai distribusi Poisson dengan parameter μ , jika X mempunyai fungsi probabilitas f(x) sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \quad ; x = 0,1,2, \dots$$

$E(X) = \mu$ dan $Var(X) = \mu$

Bukti :

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \mu e^{-\mu} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} = \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)f(x) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \mu^2 e^{-\mu}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} = \mu^2 e^{-\mu}e^{\mu} = \mu^2$$

$Var(X) = E(X^2) – [E(X)]^2$

$= E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$

$= \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$

Sifat-sifat distribusi Poisson

Berikut diberikan dua sifat penting yang berkaitan dengan distribusi probabilitas Poisson. Kedua sifat tersebut disajikan dalam teorema berikut :

Teorema 4.1

Jika X dan Y variable random independent masing-masing berdistribusi Poisson dengan parameter μ dan ν, maka jumlah (Z = X+Y) berdistribusi Poisson dengan parameter $\mu_z = \mu + \nu$.

Bukti :

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k);\ \text{X, Y saling independent}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}\frac{\nu^{n-k}e^{-\nu}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\mu+\nu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\mu^k\nu^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\mu+\nu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu^k\nu^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\mu+\nu)}(\mu+\nu)^n}{n!} \approx \text{Poisson dengan parameter } \mu + \nu$$

Terbukti bahwa Z = X+Y berdistribusi Poisson dengan parameter $\mu + \nu$.

Teorema 4.2

Jika N variable random berdistribusi Poisson dengan parameter μ, distribusi bersyarat M diberikan N=n berdistribusi Binomial dengan parameter n dan p, maka distribusi tidak bersyarat M adalah Poisson dengan parameter μp.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
P(M=k) &= \sum_{n=0}^{k} P(M=k, N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{k} P(M=k \mid N=n) P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \right) \left(\frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \right) \\
&= \frac{(\mu p)^k e^{-\mu}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\mu(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{(\mu p)^k e^{-\mu}}{k!} e^{\mu(1-p)} \\
&= \frac{(\mu p)^k e^{-\mu p}}{k!} \approx \text{Poisson dengan parameter } \mu p
\end{aligned}
$$

Jadi M berdistribusi Poisson dengan parameter μp. Selanjutnya berdasarkan distribusi Poisson dan sifat-sifat keindependenan, kita akan mendefinisikan suatu proses Poisson.

Definisi 4.1

Suatu proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ dikatakan Proses Poisson dengan rate (intensitas) $\lambda > 0$ merupakan proses yang memenuhi sifat-sifat :

(i) $X(0) = 0$

(ii) Untuk titik-titik waktu $t_0=0 < t_1<t_2<\ldots<t_n$, *increment process* : $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, …, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ merupakan variable random independent

(iii) Untuk $s\geq 0$, $t>0$, variable random $X(s+t) - x(s)$ berdistribusi Poisson dengan fungsi probabilitas :

$$P(X(s+t)-X(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \text{ ; } k=0,1,2, \ldots$$

Jadi jika $X(t)$ suatu proses Poisson rate $\lambda>0$ maka $E(X(t))=\lambda t$ dan $Var(X(t)) = \sigma^2(X(t)) = \lambda t$

Teorema 4.3

Jika $N(t)$ Proses Poisson dengan rate λ maka $\lim\limits_{t\to\infty} P\left(\left| \frac{N(t)}{t} - \lambda \right| \geq \varepsilon \right) = 0$ untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$.

Bukti :

Karena $N(t)$ Proses Poisson dengan rate λ, maka $E[N(t)] = \lambda t$ dan $Var[N(t)] = \lambda t$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|N(t)-\lambda t\right| \geq c\right) \leq \frac{\lambda t}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right| \geq \frac{c}{t}\right) \leq \frac{\lambda t}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\lambda}{t\varepsilon^2} \text{ , dengan } \varepsilon=\frac{c}{t}$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda}{t\varepsilon^2} = 0 \text{ , untuk } \varepsilon > 0$$

Teorema di atas menyatakan bahwa rate λ dari proses Poisson N(t) dapat dihampiri dengan $\frac{N(t)}{t}$

Bukti :

Dengan ketidaksamaan Chebyshev :

$$P\{| X-E(X)| \geq k\} \leq \frac{Var(X)}{k^2}, \ k > 0$$

Pada proses Poisson ini, variabel acak N(t) dengan mean λt dan variansi λt, maka

$$P\left\{\left|N(t)-\lambda t\right| \geq k\right\} \leq \frac{\lambda t}{k^2}$$

$$P\left\{\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right| \geq \frac{k}{t}\right\} \leq \frac{\lambda t}{k^2}$$

$$P\left\{\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\lambda}{t\varepsilon^2}$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda}{t\varepsilon^2} = 0 \text{, untuk } \varepsilon > 0 \text{ (terbukti)}$$

Berikut diberikan distribusi Binomial dalam konteks Proses Poisson

Teorema 4.4

Jika {X(t)} merupakan suatu Proses Poisson dengan rate $\lambda>0$, maka untuk $0<u<t$ dan $0 \leq k \leq n$ berlaku :

$$P(X(u)=k \mid X(t)=n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k}$$

Bukti :

$$P(X(u)=k \mid X(t)=n) = \frac{P(X(u)=k, X(t)=n)}{P(X(t)=n)}$$

$$= \frac{P(X(u) = k \text{ dan } X(t) - X(u) = n - k)}{P(X(t) = n)}$$

$$= \frac{P(X(u) = k)\ P(X(t) - X(u) = n - k)}{P(X(t) = n)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^k}{k!}\right)\left(\dfrac{e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-k}}{(n-k)!}\right)}{\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^n}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^k . t^{n-k}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k} \quad \text{(terbukti)}$$

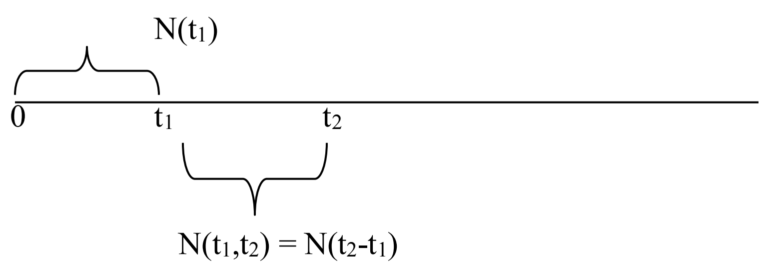
Selanjutnya misalkan N([a,b]) menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval [a,b]. Misalkan pada $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ maka N{a,b] menyatakan banyaknya nilai-nilai t_i pada $a < t_i < b$.

Berdasarkan definisi ini, kita memiliki sifat-sifat berikut :

(i) Independent

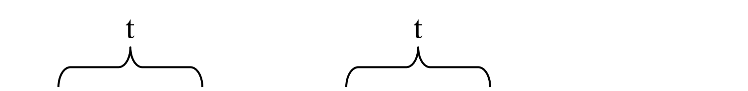
Banyak kejadian yang terjadi dalam interval-interval yang saling asing (disjoint) adalah independent, yaitu untuk sembarang bilangan bulat positif m=2, 3, 4,... dan titik-titik $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$, variabel random :

$N([t_0,t_1]), N([t_1,t_2]),\ldots, N([t_{n-1},t_n])$: adalah independent



$N(t_1,t_2) = N(t_2-t_1)$ tidak tergantung pada $N(t_1)$

(ii) Untuk sembarang t dan bilangan positif h, probabilitas dari N(t,t+h) hanya tergantung pada panjang interval h dan tidak pada t, (Homogenitas dalam waktu).



$P_k(t)$ = probabilitas banyak kejadian/peristiwa yang terjadi selama waktu t atau dalam selang waktu (t_1, t_1+t) untuk setiap nilai t_1.

(iii) Terdapat suatu konstan λ, sehingga probabilitas paling tidak satu kejadian dalam interval dengan panjang h adalah :

$$P[N(t,t+h)\geq 1] = \lambda h + o(h),\ h \to 0$$

(iv) Probabilitas dua atau lebih kejadian yang terjadi dalam interval dengan panjang h adalah O(h) atau :

$$P[N(t,t+h)\geq 2] = O(h),\ h \to 0$$

Perhatikan bahwa berdasarkan (i) dan (ii), distribusi dari N[(s,t)] adalah sama seperti N[(0,t-s)]. Selanjutnya untuk menggambarkan distribusi probabilitas dari sistem, cukup ditentukan probabilitas dari N[(0,t)] untuk sembarang nilai t. Jika $P_k(t)$ = P[N((0,t]=k], maka berdasarkan (i) - (iv), $P_k(t)$ berdistribusi Poisson, yaitu :

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\ ,\ k = 0, 1,2, \ldots$$

Dengan $E[N(t)] = \lambda\ t$

$Var\ [N(t)] = \lambda\ t$

Contoh 1.

Jika kedatangan orang ke suatu Bank mengikuti proses Poisson dengan rata-rata 20 orang tiap menit, maka :

(i) Probabilitas dalam selang waktu 1 jam (60 menit) ada sebanyak 100 orang yang dating adalah :

$$P(N(60)=100) = \frac{((20)(60))^{100} e^{-((20).(60))}}{100!}$$

Dengan N(t) menyatakan banyaknya suatu peristiwa yang terjadi pada interval waktu (0,t), dengan kata lain N(t) menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi selama waktu t.

(ii) Probabilitas ada 50 orang datang dalam interval waktu 10.00 – 10.15 jika diketahui bahwa antara interval waktu 9.00 – 10.00 ada 100 orang yang datang adalah :

$P(N(15)=50\ |N(60)=100) = P(N(15)=50)$; (karena sifat independent)

Akibatnya :

$$P(N(15)=50) = \frac{((20)(15))^{50} e^{-((20).(15))}}{50!}$$

Contoh 2.

Kedatangan pelanggan {X(t)} dalam sebuah swalayan diasumsikan mengikuti proses Poisson dengan rate λ=4 per jam. Apabila swalayan buka pukul 09.00 maka probabilitas tepat satu pelanggan datang pada 09.30 dan total 5 pelanggan pada 11.30 adalah ….

(satuan waktu : jam , 30 menit = ½ jam, 09.00 – 11.30 = 2½ jam), maka :

$$
\begin{aligned}
P(X(½)=1 \text{ dan } X(2½)=5) &= P(X(½)=1 \text{ dan } X(2½)-X(½)=4) \\
&= P(X(½)=1)\,.\,P(X(2½)-X(½)=4) \\
&= \frac{\left(4.\tfrac{1}{2}\right)^{1} e^{-\left(4.\tfrac{1}{2}\right)}}{1!}\,\frac{(4.2)^4 e^{-(4.2)}}{4!} \\
&= \left(2e^{-2}\right)\left(\frac{8^3}{3}e^{-8}\right) = \frac{1024}{3}e^{-10} = 0{,}0154965
\end{aligned}
$$

Dekomposisi Proses Poisson

Suatu pilihan acak dari suatu proses Poisson menghasilkan proses Poisson. Seandainya N(t)=banyaknya peristiwa (E) yang terjadi dalam interval t, adalah proses Poisson dengan parameter λ. Sedangkan terjadinya peristiwa E akan tercatat mempunyai probabilitas p, dan tercatatnya suatu kejadian adalah independen dengan kejadian yang lain, juga terhadap N(t). Jika M(t) banyaknya kejadian yang tercatat dalam selang waktu t, maka M(t) juga merupakan proses Poisson dengan parameter λp.

Bukti :

Peristiwa M(t)=n dapat terjadi seperti berikut

A_r=peristiwa E terjadi (n+r) sampai dengan waktu t dan tepat n diantara (n+r) kejadian tercatat, probabilitas setiap kejadian tercatat adalah p, sedang r =0,1,2,...

$P(A_r)$=P(peristiwa E terjadi (n+r) kali sampai dengan waktu t)

P(n kejadian tercatat bila diketahui banyaknya kejadian adalah (n+r)) :

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+r}}{(n+r)!}\binom{n}{r}p^n q^r$$

Maka $P(M(t)=n)= \sum_{r=0}^{\infty} P(A_r)$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+r}}{(n+r)!}\binom{n+r}{n}p^n q^r$$

$$= e^{-\lambda t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda pt)^n(\lambda qt)^r}{n!r!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda pt)^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda qt)^r}{r!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda pt)^n}{n!} e^{\lambda qt}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t(1-q)}(\lambda pt)^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^n}{n!} \approx \text{Poisson dengan parameter } \lambda p.$$

Contoh.

Seandainya banyaknya kelahiran di suatu rumah sakit mengikuti distribusi poisson dengan parameter λ. Bila seorang bayi akan lahir probabilitasnya laki-laki adalah p, maka banyaknya kelahiran laki-laki di rumah sakit itu mengikuti distribusi poisson dengan parameter λp (disini kejadian yang tercatat adalah kelahiran laki-laki). Tentunya banyaknya kelahiran wanita di rumah sakit itu mengikuti distribusi Poisson dengan parameter $\lambda(1-p)$. Dari contoh ini dapat ditarik kesimpulan secara umum jika N(t) proses Poisson dengan parameter λ dapat didekomposisi menjadi r macam proses Poisson dan $p_1, p_2, ..., p_r$ probabilitas pendekomposisian menjadi r macam proses Poisson yang independen, maka proses Poisson N(t) terdekomposisi menjadi r proses Poisson yang independen dengan parameter $\lambda p_1, \lambda p_2, ..., \lambda p_r$, di mana $p_1+p_2+...+p_r = 1$.

Contoh 3.

Suatu sumber radioaktif memancarkan partikel dengan rata-rata 5 partikel permenit sesuai dengan proses Poisson. Tiap partikel yang dipancarkan mempunyai probabilitas 0,6 untuk dicatat. Variabel acak N(t) menyatakan banyaknya partikel yang tercatat selama selang waktu t. Tentukan probabilitas bahwa ada 10 partikel yang tercatat selam selang waktu 4 menit!

Penyelesaian :

Diketahui : p=0,6, t=4 menit , λ= 5 .(0,6)=3

Ditanya : P(N(4)=10) = ...?

$$P(N(4)=10) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \frac{e^{-3.4}(3.4)^{10}}{10!} = 0{,}104$$

Contoh 4.

Karyawan pada penerbit majalah bagian langganan mencatat rata-rata 6 langganan baru/hari, dan banyaknya langganan baru yang mendaftarkan diri perhari mengikuti proses Poisson. Setiap langganan baru akan menjadi langganan selama 1 tahun atau 2 tahun dengan probabilitas $\frac{2}{3}$ dan $\frac{1}{3}$. Jika karyawan itu akan mendapatkan bonus a rupiah untuk setiap langganan 1 tahun dan b rupiah untuk langganan 2 tahun, maka tentukan harapan besarnya bonus yang akan diterima selama selang waktu t hari?

Penyelesaian :

$N(t)$ = banyak langganan yang mendaftar selama selang waktu t

$N(t)$ berdistribusi poisson dengan $E[N(t)]=\lambda t = 6t$

$N_1(t)$ = banyak langganan yang mendaftar untuk 1 tahun dalam selang waktu t tahun

$N_2(t)$ = banyak langganan yang mendaftar untuk 2 tahun dalam selang waktu t tahun

Sehingga terdapat hubungan $N(t)=N_1(t) + N_2(t)$

$N_1(t)$ mengikuti proses Poisson dengan parameter $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$.

Jadi $N_1(t)$ mempunyai mean = $E(N_1(t))= 4t$

$N_2(t)$ mempunyai mean = $E(N_2(t))= 6 \cdot \frac{1}{3} = 2t$.

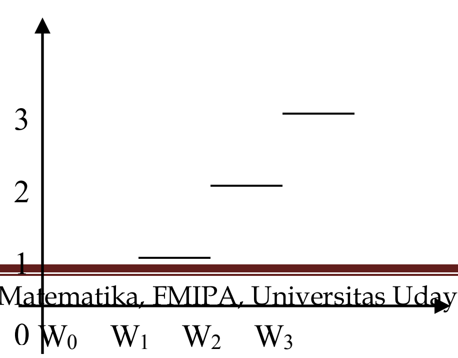
Bila $X(t)$ = besarnya bonus yang diterima selama selang waktu t, ini berarti :

$$X(t) = a\, N_1(t) + b\, N_2(t)$$
$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(a\, N_1(t) + b\, N_2(t)) \\ &= a\, E[N_1(t)] + b\, E[N_2=(t)] \\ &= a\,(4t) + b\,(2t) \end{aligned}$$

4.2. Distribusi-distribusi yang Berhubungan dengan Proses Poisson

Suatu proses Poisson $N([s,t])$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval $[s,t]$. Sedangkan proses Poisson $X(t)$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi sampai waktu t. Jadi $X(t) = N([0,t])$ yang sering ditulis dengan $N(t)$. Kejadian-kejadian Poisson yang terjadi pada suatu ruang dapat dimodelkan dengan baik sebagai suatu Proses titik. Hal ini dapat digambarkan dalam suatu ilustrasi berikut :

Misalkan W_n menyatakan waktu penantian sampai terjadinya sebanyak n kejadian. Karena demikian, W_n sering disebut waktu tunggu atau waiting time, sering ditulis $W_0 = 0$.



Berikut diberikan teorema yang menyatakan waktu tunggu W_n berdistribusi gamma.

Teorema 4.5

Jika W_n menyatakan waktu penantian sampai terjadinya n kejadian maka W_n berdistribusi Gamma dengan fungsi probabilitas :

$$f_{w_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \; ; \quad n=0,1,2,3,4, \dots ; \; t \geq 0$$

Bukti:

Kejadian $W_n \leq t$ terjadi, terdapat paling tidak n kejadian dalam interval [0,t]. Diketahui banyaknya kejadian dalam interval [0,t]. Kita tahu bahwa banyaknya kejadian dalam interval [0,t] berdistribusi Poisson dengan mean λt, maka distribusi kumulatif W_n didapat dari :

$$\begin{aligned} F_{W_n}(t) &= P(w_n \leq t) \\ &= P(X(t) \leq n) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=n}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \end{aligned}$$

Dengan menderivatifkan $Fw_n(t)$, diperoleh fungsi probabilitas ($f_{Wn\,(t)}$)

$$\begin{aligned} f_{W_n}(t) &= \frac{d}{dt}(F_{W_n}(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{(\lambda t)}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right) = \end{aligned}$$

$$\lambda e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{(\lambda t)}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) - e^{-\lambda t}\left(\lambda + \frac{\lambda(\lambda t)}{1!} + \frac{\lambda(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \quad \text{(terbukti)}$$

Akibat

Jika W_1 menyatakan waktu penantian sampai terjadinya satu kejadian, maka W_1 berdistribusi eksponensial dengan fungsi probabilitas :

$$f_{W_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\ ,\ t \geq 0$$

Selanjutnya kita ingin mengetahui distribusi dari interval waktu yang berurutan suatu proses Poisson. Distribusi interval ini adalah eksponensial yang secara lengkap diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.6

Jika S menyatakan variabel random yang menyatakan interval antara dua kejadian yang saling berurutan dari proses Poisson, maka S berdistribusi eksponensial negatif dengan fungsi probabilitas :

$$f_S(s) = \lambda e^{-\lambda s}\ ,\ s > 0$$

Bukti

S menyatakan interval waktu yang berurutan dua proses Poisson.

$F_S(s) = P(S \leq s)$

$= 1 - P(S>s)$

$= 1 -$ P(suatu peristiwa $(i+1)$ tidak terjadi dalam interval $(t_i,\ t_i+s)$ jika diketahui peristiwa i terjadi pada waktu t_i)

$= 1 - P(N(s)=0 \mid N(t_i)=i)$

$= 1 - e^{-\lambda s}$, $s > 0$

Persamaan terakhir memberikan fungsi distribusi probabilitas S sebagai berikut :

$$f_S(s) = \frac{d}{ds}\left(F_S(s)\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(1 - e^{-\lambda s}\right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda s}\ ,\ s>0$$

Teorema berikut menyajikan hubungan antara variabel random interval waktu berurutan suatu peristiwa A dengan distribusi peristiwa A tersebut.

Teorema 4.7

Jika interval dua kejadian yang saling berurutan suatu peristiwa A adalah berdistribusi independen identik berupa eksponensial negatif dengan fungsi probabilitas :

$$f_S(s) = \lambda e^{-\lambda s}\ , s>0$$

maka peristiwa A membentuk proses Poisson

Bukti

Karena S_i merupakan interval antara kejadian ke-(i-1) dan ke-i suatu proses Poisson, maka menurut teorema 4.6 S_i berdistribusi eksponensial dengan fungsi probabilitas:

$$f_S(s) = \lambda e^{-\lambda s}\ , s>0$$

Selanjutnya, misalkan

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Karena S_i independen dan identik, maka W_n berdistribusi Gamma dengan fungsi probabilitas :

$$f(u) = \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u}\ , u > 0$$

Pada pihak lain diperoleh :

$$\begin{aligned} F_W(t) &= P(W_n \le t) \\ &= 1 - P(W_n > t) \\ &= 1 - P(N(t) < t) \\ &= 1 - P(N(t) \le n\text{-}1) \\ &= 1 - F_N(n\text{-}1) \end{aligned}$$

Dengan F_N : menyatakan fungsi distribusi dari N dan F_W menyatakan fungsi distribusi W.

$$\begin{aligned} F_N(n\text{-}1) &= 1 - F_W(t) \\ &= 1 - \int_0^t \frac{\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u}}{(n-1)!} du \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda t} x^{n-1} e^x dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{\lambda t}^{\infty} x^{n-1} e^x dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh hubungan :

$$P(N(t)=n) = F_N(n) - F_N(n\text{-}1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \text{ , } n = 0,1,2, \ldots$$

Jadi N(t) merupakan proses Poisson

4.3. **Proses Poisson Non Homogen**

Dalam proses poisson X(t), probabilitas dari suatu kejadian terjadi pada suatu sembarang interval yang pendek proprsional dengan konstanta λ. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut :

$$P[X(t+h) - X(t) = 1] = \frac{(\lambda h)e^{-\lambda h}}{1!}$$
$$= \lambda h(1 - \lambda h + \tfrac{1}{2}\lambda^2 h^2 - \ldots$$
$$= \lambda h + o(h)$$

Dalam beberapa aplikasi mungkin probabilitas di atas tergantung pada suatu rate $\lambda = \lambda(t)$ yang merupakan fungsi dari t. Proses yang demikian ini disebut sebagai proses Poisson Non Homogen atau Non Stationary. Jadi jika X(t) adalah suatu proses Poisson Non Homogen dengan rate $\lambda(t)$, maka :

(i) X(t) – X(s) yang menyatakan banyak kejadian dalam suatu interval (s,t) berdistribusi Poisson dengan parameter :

$$\int_s^t \lambda(u)du$$

(ii) Increment dari interval-interval disjoint merupakan variabel random independet

Contoh :

Misalkan diketahui permintaan pertolongan dalam suatu lokasi mengikuti proses Poisson non homogen dengan fungsi rate :

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2t & ; 0 \le t < 1 \\ 2 & ; 1 \le t < 2 \\ 4 - t; & 2 \le t < 4 \end{cases}$$

Dengan t merupakan ukuran dalam jam dari mulai buka fasilitas tersebut. Berapa probabilitas bahwa 2 permintaan terjadi dalam dua jam pertama operasi, selanjutnya berapa probabilitas 2 permintaan terjadi pada 2 jam kedua?

Penyelesaian :

- Pada dua jam pertama, nilai mean (μ) adalah :

$$\mu = \int_0^1 2t\,dt + \int_1^2 2\,dt = 3$$

sehingga P(X(2)=2)= $\dfrac{e^{-3}3^2}{2!} = 0{,}224$

- Pada dua jam berikutnya :

$$\mu = \int_2^4 (4-t)\,dt = 4t - \frac{1}{2}t^2 \Big|_2^4 = 2$$ Jadi P(X(4)-X(2) = 2)= $\dfrac{e^{-2}2^2}{2!} = 0{,}2727$

Selesaikan Soal-soal berikut !

1. Diketahui banyaknya pasien yang datang di rumah sakit “Sehat” mengikuti proses Poisson dengan rata-rata 15 pasien perhari. Sedangkan banyaknya pasien yang sembuh dan meninggalkan rumah sakit rata-rata 10 orang perhari dan mengkuti proses poisson. Tentukan :
   (i) Probabilitas banyaknya pasien yang datang selama 4 hari hanya 20 orang
   (ii) Probabilitas bahwa banyaknya pasien yang meninggalkan rumah sakit selama 2 hari tidak kurang dari 12 pasien
   (iii) Jika N(t) banyaknya pasien yang belum sembuh selama waktu t hari, maka berapakah probabilitas bahwa setelah lima hari tidak ada pasien yang tinggal atau (P(N(5)=0)?
   (iv) Berapa E(N(t))
   (v) Berapa Var [N(t)]

2. Banyaknya orang yang datang di suatu toko serba ada membentuk Proses Poisson dengan rata-rata 10 orang tiap menit. Seseorang yang datang pria dewasa, putri dewasa atau anak-anak adalah independent dengan probabilitas masing-masing $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ dan $\frac{2}{5}$. Tentukan :
   (i) Probabilitas bahwa banyaknya orang yang datang di toko serba ada itu 5 pria dalam selang waktu 4 menit
   (ii) Menurut pengamatan ada 15 orang yang datang di toko serba ada itu selama selang waktu 2 menit. Berapa probabilitasnya ada 10 orang yang datang dalam selang waktu 1 menit pertama?
   (iii) Jika N(t) banyak pengunjung toko serba ada adalah pria atau anak-anak dalam selang waktu t menit, berapa P(N(3)=12)?
   (iv) Seorang pengunjung pria akan menghabiskan Rp 100.000, putri Rp 200.000 dan anak-anak Rp 50.000, berapa harapan banyak uang yang akan didapat toko serba ada selama selang waktu 2 menit?
   (v) Probabilitas bahwa yang datang di toko serba ada selama selang waktu 3 menit ada 30 putri atau anak-anak.

3. Banyaknya kecelakaan di suatu daerah mengikuti proses poisson dengan rata-rata 2 tiap hari. Sedangkan X_j adalah banyaknya orang yang terlibat dalam kecelakaan ke-j mengikuti distribusi :

   $P(X_j = k) = 2^{-k}$, $k \geq 1$

Berapa mean banyak orang yang terlibat dalam kecelakaan perminggu?

BAB V
PROSES INPUT – OUTPUT
(BIRTH – DEATH PROCESSES)

5.1 Persamaan Proses Input-Output

Proses input-output merupakan perluasan dari proses Poisson, sebagai input misalnya adalah orang yang datang ke suatu sistem dan sebagai output adalah orang yang telah selesai mendapat pelayanan dari sistem tersebut. Dalam proses ini, orang yang datang diasumsikan sesuai dengan proses Poisson dan waktu pelayanannya sesuai dengan distribusi eksponensial.

Beberapa simbol yang digunakan antara lain :

$P_n(t)$ = P[N(t) = n] = probabilitas terdapat n orang dalam sistem pada interval waktu t;

λ_n = arrival rate (laju kedatangan rata-rata bila ada n orang dalam sistem)

μ_n = departure rate (laju pelayanan rata-rata)bila ada n orang dalam sistem

Asumsi-asumsi pada proses input-output sesuai dengan proses Poisson, kecuali dalam proses ini ada outputnya. Asumsi-asumsinya adalah :

1. P[terdapat 1 input dalam (t, t+Δt)|n populasi] = $\lambda_n \Delta t$
2. P[terdapat 1 output dalam (t, t+Δt)|n populasi] = $\mu_n \Delta t$
3. P[terdapat 0 input dalam (t, t+Δt)|n populasi] =1 - $\lambda_n \Delta t$
4. P[terdapat 0 output dalam (t, t+Δt)|n populasi] = 1 - $\mu_n \Delta t$

Dengan menggunakan asumsi-asumsi tersebut dapat dibuktikan bahwa proses input-output memenuhi sistem persamaan beda diferensial sebagai berikut :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), & n = 0 \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t), & n \geq 1 \end{cases}$$

Dalam kondisi steady-state (t $\rightarrow\infty$) maka :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0 \text{ dan } \frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Diperoleh :

State	Probability
0	$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$
1	$P_2 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_1\mu_2} p_0$
2	$P_3 = \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_1\mu_2\mu_3} p_0$
$\vdots$	$\vdots$
n-1	$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1} \ldots \mu_1} p_0$

Bila diambil $C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1} \ldots\mu_1}$ maka $P_n = C_n p_0$; n = 1, 2, 3, … dengan syarat $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$.

Jadi $[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n]P_0 = 1$ sehingga $P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} C_n}$.

5.2 Sistem Antrian

Salah satu penerapan proses input-output adalah sistem antrian. Dalam sistem ini laju kedatangan dan pelayanan dianggap tetap. Besaran-besaran yang ingin dihitung adalah :

P_n = probabilitas terdapat n orang dalam sistem (steady state)

L_s = rata-rata pelanggan dalam sistem

L_q = rata-rata pelanggan dalam antrian

W_s = rata-rata waktu tunggu dalam sistem

W_q = rata-rata waktu tunggu dalam antrian

Rumus :

$$L_s = \lambda W_s \;; \quad L_q = \lambda W_q \;; \quad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \;;$$

5.2.1 Sistem M/M/1

Dalam sistem ini diambil $\begin{cases} \lambda_n = \lambda; n = 0,1,2,\ldots \\ \mu_n = \mu; n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$

Diperoleh :

$C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n \; ; n = 0,1,2,\ldots$

$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n(1-\rho) \; ; \; P_0 = 1-\rho$

$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\, P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

Contoh A :

Sebuah klinik suatu perusahaan memperkerjakan seorang dokter untuk melayani kesehatan karyawannya. Andaikan pasien yang datang ke poliklinik tersebut sesuai dengan proses Poisson dengan rata-rata 4 orang tiap jam. Dokter dapat melayani 5 pasien tiap jam (andai waktu pelayanan berdistribusi eksponensial). Dengan mengandaikan perusahaan tersebut beroperasi 24 jam, hitung :

a. Probabilitas dokter sibuk dan tidak sibuk dan interpretasikan hasilnya
b. Rata-rata banyak pasien di klinik tersebut
c. Rata-rata banyak pasien yang antri
d. Rata-rata waktu tunggu pasien
e. Misal ada kerugian sebesar Rp 2000,- untuk tiap jam menunggu tiap pekerja, maka hitung rata-rata kerugian tiap hari karena adanya waktu tunggu tersebut
f. Probabilitas terdapat lebih dari 3 pasien dalam poliklinik dan simpulkan hasilnya
g. Andaikan dokter tersebut mempercepat pelayanannya dengan 6 pasien tiap jam, hitung kembali point (a – e)!

Penyelesaian :

$\lambda = 4$, $\mu = 5$, dan $\rho = 0{,}8$

a. $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}8$ (Probabilitas dokter sibuk). Maka probabilitas dokter tidak sibuk : $P_0 = 1 - \rho = 0{,}2$
b. Rata-rata banyak pasien di klinik : $L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{4}{5-4} = 4$ orang tiap jam
c. Rata-rata banyak pasien yang antri : $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{4^2}{5(5-4)} = \frac{16}{5} = 3{,}2$ orang tiap jam
d. Rata-rata waktu tunggu pasien: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3{,}2}{4} = 0{,}8$ jam = 48 menit
e. Tiap hari rata-rata ada $24 \times 4 = 96$ pasien. Ekspektasi waktu yang hilang karena adanya waktu tunggu tersebut adalah $96 \times 0{,}8 = 76{,}8$ jam. Jadi

besar kerugian karena adanya waktu tunggu tersebut adala 76,8$\times$ $Rp\ 2000$ = Rp. 153.600,-

f. Probabilitas terdapat lebih dari k orang dalam sistem adalah :

$$P[n > k] = \rho^{k+1} = 0{,}8^4 = 0.4096$$

g. Bila λ=4, μ = 6; (rata-rata waktu pelayanan 1/μ = 1/6 jam = 10 menit) maka :

$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{4^2}{6(6-4)} = \frac{16}{12} = 1{,}33$ orang

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1{,}33}{4} = \frac{1}{3}$ jam = 20 menit

Disini terlihat bahwa sebelum ada perubahan, rata-rata waktu pelayanan adalah 12 menit dengan waktu tunggu 48 menit. Setelah perubahan kecepatan, rata-rata pasien dilayani 10 menit dan waktu tunggu 20 menit. Jadi penghematan waktu adalah sebesar : $\frac{20}{48} = \frac{5}{12} \cong 42\%$, sehingga penghematan biaya tiap hari sebesar $96 \times 0{,}42 \times Rp. 2000 = Rp. 80.640,-$

5.2.2 Sistem M/M/K (Sistem antri jalur ganda/ K jalur)

Parameter proses input-output :

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda \ , n = 0,1,2,\ldots \quad , \qquad n = 0,1,2,.. \\ \mu_n = \begin{cases} n\mu \ ; n = 0,1,2,\ldots,K. \quad (n \le K) \\ K\mu \ ; n = K+1, K+2, \ldots, (n \ge K) \end{cases} \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} \ , & , \ n = 0,1,2,\ldots,K \\ \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^K}{K!}\left(\dfrac{\lambda}{K\mu}\right)^{n-K} = \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{K!\,K^{n-K}} & , n = K+1, K+2, \ldots \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{K-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^K}{K!}\ \frac{1}{1-(\lambda/K\,\mu)}\right]}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(K\rho)^n}{n!}P_0 \ , & n = 0,1,2,\ldots,K \\ \dfrac{K^K\rho^n}{K!}P_0 \ , & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases}$$

$$L_q = \sum_{n=K}^{\infty}(n-K)P_n = \sum_{j=0} jP_{n+j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^K}{K!}\rho^j P_0$$

$$L_q = \frac{K^K\rho^{K+1}P_0}{K!\,(1-\rho)^2} = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^K \rho\ P_0}{K!\,(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu}\ ; \qquad L = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Contoh B: Bila dari kasus pada Contoh A, tetapi di sini poliklinik tersebut ditambah seorang dokter lagi, yang keahliannya sama dengan dokter pertama dan dapat melayani 5 pasien tiap jam. Jadi sistem ini sesuai dengan M/M/2 : λ = 4; μ = 5; K = 2

Maka :
$\rho = \frac{\lambda}{K\mu} = \frac{4}{2\times 5} = 0{,}4$
$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{0{,}8^2}{2(1-0{,}8/2)}+1+\frac{0{,}8}{1}\right]} = 0{,}43$

Untuk n = 1 → $P_1 = 0{,}43\ \frac{0{,}8}{1} = 0{,}34$
Untuk n = 2 → $P_2 = 0{,}43\ \frac{0{,}8^2}{2!} = 0{,}13$
Untuk n = 3 → $P_3 = 0{,}43\ \frac{0{,}8^3}{2.2} = 0{,}06$
Untuk n = 4 → $P_4 = 0{,}43\ \frac{0{,}8^4}{2.2^2} = 0{,}02$
Untuk n = 5 → $P_5 = 0{,}43\ \frac{0{,}8^5}{2.2^3} = 0{,}01$
Untuk n > 5 diabaikan

Rata-rata banyak pasien di poliklinik dihitung sebagai berikut :

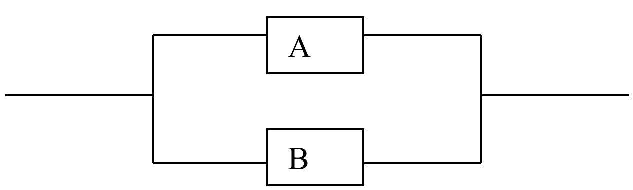
$L = \sum_{n=0}^{\infty} m\, P_n = 0{,}91$

$L_q = \frac{0{,}8^3}{2.2\left(1-\frac{0{,}8}{2}\right)^2}(0{,}43) = 0{,}153$

$W_q = \frac{0{,}153}{4} = 0{,}038$ jam
$T = 4 \times 24 \times 0{,}038 = 3{,}65$ jam (sebelum 76,8 jam). Besarnya kerugian karena adanya waktu tunggu tersebut rata-rata adalah 3,65 x Rp 2000 =Rp 7300 tiap hari. Jadi ada penghematan sebesar Rp 153.600,00 – Rp 7.300 = Rp 146.300,- tiap hari karena ada penambahan 1 tenaga dokter.

Contoh C :

Andaikan suatu sistem S terdiri atas 2 komponen A dan B yang dipasang sejajar, dimana sistem berfungsi baik bila salah satu komponen tersebut berfungsi baik.



Andaikan laju kerusakan komponen A adalah λ_a dan laju kerusakan komponen B adalah λ_b. Hitung probabilitas sistem S berfungsi baik?

Komponen	State			
	1	2	3	4
A	B	B	R	R
B	B	R	B	R

B : Baik
R : Rusak

Berdasarkan diagram tersebut diperoleh sistem persamaan :

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_a + \lambda_b)P_1 t \rightarrow P_1(t) = e^{-(\lambda_a+\lambda_b)\,t}$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_a P_1 t + \lambda_b P_2 t \rightarrow P_2(t) = e^{-\lambda_b\,t} - e^{-(\lambda_a+\lambda_b)\,t}$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_b P_1 t - \lambda_a P_3 t \rightarrow P_3(t) = e^{-\lambda_a\,t} - e^{-(\lambda_a+\lambda_b)\,t}$$

Jadi probabilitas sistem S berfungsi baik adalah :

P[S berfungsi baik] = $P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$

Beberapa sistem lain dalam sistem antrian diantaranya :

Sistem M/M/1/K

Sistem M/M/S/K

Sistem Antrian Seri (Tanden/Network)

(i) Sistem Antrian Seri 2 Stasion dan Kapasitas Nol

Sistem Antrian Seri K Stasion dengan Kapasitas Tak Terbatas

BAB VI
TEORI PEMBARUAN
(RENEWAL PROCESSES)

6.1 Pendahuluan

Pada bab sebelumnya telah dibahas bahwa proses Poisson adalah proses hitung dimana antar waktu kejadian berturut-turut adalah proses independen dan mempunyai distribusi sama yaitu distribusi eksponensial. Perluasan dari proses tersebut adalah bila antar waktu kejadian berturut-turut berdistribusi sembarang. Proses hitung yang demikian disebut proses pembaruan. Misal $\{N(t),\ t > 0\}$ adalah proses hitung dan misal X_n menunjukkan waktu antar kejadian ke (n-1)dengan kejadian ke n, dimana $n \geq 1$.

Definisi 1.1

Jika barisan variable acak non negative $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ adalah independen dan berdistribusi sama, maka proses hitung $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses pembaruan.

Jadi proses pembaruan adalah suatu proses hitung sedemikian hingga jangka waktu kejadian pertama muncul mempunyai distribusi F, jangka waktu kejadian pertama dan kedua adalah independen dengan jangka waktu kejadian pertama dan mempunyai distribusi F yang sama, demikian seterusnya. Jika suatu kejadian muncul, maka disebut suatu pembaruan (renewal) terjadi. Sebagai contoh proses pembaruan, andaikan ada bola lampu yang banyaknya tak terhingga dimana usia pakai (life time)nya masing-masing adalah independen dan berdistribusi sama. Andaikan juga bahwa sebuah bola lampu digunakan dan jika bola lampu tersebut rusak dalam jangka waktu tertentu maka diganti dengan yang baru. Berdasarkan keadaan itu, $\{N(t),\ t \geq 0\}$ adalah suatu proses pembaruan, dimana N(t) menunjukkan banyak bola lampu yang rusak dalam jangka waktu t. Untuk proses pembaruan dengan antar waktu kedatangan X_1, X_2, … ambil :

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 0$$

Dengan $S_1 = X_1$ adalah jangka waktu pembaruan yang pertama; $S_2 = X_1 + X_2$ adalah jangka waktu pembaruan pertama ditambah antar waktu pembaruan pertama dengan kedua, yaitu S_2 adalah jangka waktu pembaruan kedua. Secara umum S_n menunjukkan jangka waktu pembaruan ke-n.

Selanjutnya ambil F, menunjukkan distribusi antar waktu kedatangan dan untuk mencegah trivitalitas maka diandaikan bahwa $F(0) = P(X_n = 0\} < 1$. Selanjutnya ambil $\mu = E[X_n]$, $n \geq 1$ adalah rata-rata (mean) antar waktu pembaruan berturut-turut.