Analisis Post-Optimal

A. DUAL

- Solusi optimal dari linear program dapat dianalisis oleh dual dan analisis sensitifitas.
- Setiap model program linear mempunyai bentuk primal dan dual. Bantuk asli adalah primal sedangkan dual dikembangkan dari bentuk primal.
- Contoh : Sebuah perusahaan memproduksi meja dan kursi. Setiap meja memiliki keuntungan $160 dan kursi memiliki keuntungan $200. Sumber yang menjadi batasan adalah tenaga kerja, kayu, dan luas tempat penyimpanan. Batasan diperlihatkan sebagai berikut :

Kebutuhan Sumber			
Sumber	Meja	Kursi	Ketersediaan perhari
Tenaga kerja	2 jam	4 jam	40 jam
Kayu	18 pon	18 pon	216 pon
Tempat penyimpanan	24 m^2	12 m^2	240 m^2

Perusahaan ingin mengetahui banyaknya meja dan kursi yang harus diproduksi agar menghasilkan keuntungan maksimum

- Model program linearnya adalah

Maksimumkan $Z = 160x1 + 200x2$

Batasan $2x1 + 4x2 \leq 40$ tenaga kerja

$18x1 + 18x2 \leq 216$ kayu

$24x1 + 12\ x2 \leq 240$ tempat menyimpan

$x1, x2 \geq 0$

Diketahui : $x1$ = jumlah meja yang diproduksi

$x2$ = jumlah kursi yang diproduksi

Bentuk dual untuk model diatas adalah :

Minimumkan $Z = 40y1 + 216y2 + 240y3$

Batasan $2y1 + 18y2 + 24y3 \geq 160$

$4y1 + 18y2 + 12y3 \geq 200$

$y1, y2, y3 \geq 0$

- Hubungan bentuk primal dan dual

1. Peubah dual y1, y2, dan y3 berhubungan dengan batasan model primal. Satu batasan model primal adalah satu peubah keputusan model dual.
2. Nilai kuantitas batasan primal merupakan koefisien fungsi tujuan model dual.
3. Koefisien sebuah batasan model primal adalah koefisien sebuah peubah keputusan model dual.
4. Koefisien fungsi tujuan model primal adalah kuantitas pada batasan model dual.
5. Model maksimum model primal adalah ≥ sedangkan model dual adalah ≤.

1. Interpretasi Model Dual

Pada kasus diatas, solusi optimal simpleks untuk model primalnya sebagai berikut :

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200	0	0	-M
			x1	x2	s1	s2	s3
200	x2	8	0	1	½	-1/8	0
160	x1	4	1	0	-1/2	1/9	0
0	s3	48	0	0	6	-2	1
	zj	2240	160	200	20	20/3	0
	cj - zj		0	0	-20	-20/3	0

Diperoleh x1 = 4 meja, x2 = 8 kursi, s3 = 48 m^2 tempat penyimpanan.

Tabel simpleks optimal juga menyimpan informasi mengenai dual.

- Nilai baris cj-zj yang negatif sebesar $20 dan $6.67 merupakan *nilai marginal* dari tenaga kerja (s1) dan kayu (s2). Nilai-nilai ini sering disebut *shadow prices* karena mencerminkan harga maksimum yang bersedia dibayar untuk mendapatkan tambahan sumberdaya.
- Nilai marginal dapat digunakan untuk menganalisis batasan-batasan model. Contoh :
- $2x1 + 4x2 \leq 40$ tenaga kerja

Solusi pada model primal adalah x1 = 4 meja, x2 = 8 kursi dan nilai 1 unit tenaga kerja adalah $20. Apabila diproduksi 4 meja maka didapatkan ($20/ jam) (2jam/ meja) (4 meja) = $160 nilai tenaga kerja yang digunakan untuk memproduksi meja.

Sedangkan bila diproduksi 8 buah kursi maka didapatkan ($20/ jam) (4 jam/ kursi) (8 kursi) = $640 nilai tenaga kerja yang digunakan untuk memproduksi kursi.

- $18x1 + 18x2 \leq 216$

Pada batasan kayu, andaikan meja dibuat sebanyak 4 buah maka nilai kayu untuk meja-meja tersebut adalah (\$6.67/ pon) (4 meja) (18 pon/meja) = \$480

Dan nilai kayu untuk 8 kursi adalah (\$6.67/pon)(8 kursi)(18pon/kursi) = \$960.

Sehingga nilai total dari tenaga kerja dan kayu untuk memproduksi 4 meja dan 8 kursi adalah \$160 + \$640 + \$480 + \$960 = \$2.240 yang juga merupakan laba dari solusi optimal. Bagaimana dengan tempat penyimpanan, tempat penyimpanan tidak memiliki nilai marginal dapat diperhatikan pada tabel simpleks optimal pada baris cj-Zj = 0.

Perhatikan model dual berikut

Minimumkan $Z = 40y1 + 216y2 + 240y3$

Batasan $2y1 + 18y2 + 24y3 \geq 160$

$4y1 + 18y2 + 12y3 \geq 200$

$y1, y2, y3 \geq 0$

- Tabel optimal solusi simpleks untuk model dual

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	40	200	0	0	-M
			y1	y2	y3	s1	S2
216	y2	6.67	0	1	2	-1/9	1/18
40	y1	20	1	0	-6	½	-1/2
	Zj	2.240	40	216	192	-4	-8
	Zj-cj		0	0	-48	-4	-8

- Batasan dual yang pertama,

$2y1 + 18y2 + 24y3 \geq 160$ keuntungan per meja

$2y1 = 2(\$20) = \$40$ nilai tenaga kerja yang digunakan untuk memproduksi sebuah meja

$18y2 = 18(\$6.67) = \$120$ nilai kayu yang digunakan untuk memproduksi sebuah meja

$24y3 = 24(\$0) = \$0$ nilai tempat penyimpanan untuk memproduksi sebuah meja

- Batasan dual yang kedua dapat dianalisis dengan cara yang sama

- Fungsi tujuan dual adalah

Minimumkan Z = 40y1 + 216y2 + 240y3, koefisien fungsi tujuan merupakan total sumberdaya yang tersedia, jika nilai marginalnya dimasukan ke model akan memperoleh nilai total sumberdaya Z = 40jam ($20/jam) + (216 pon)($6.67 pon) + (240 m^2)($0) =$2.240 (perhatikan Zprimal = Zdual).

Secara umum, solusi primal dan dual memiliki hubungan sebagai berikut:

Primal	Dual
cj-Zj untuk peubah pengurang si	Nilai untuk peubah keputusan yi
Cj-Zj untuk peubah keputusan xi	Nilai untuk peubah pengurang si
Zp adalah nilai fungsi tujuan	Zd adalah nilai fungsi tujuan

2. Merumuskan Dual pada Fungsi Tujuan Primal yang Meminimumkan

Andaikan terdapat model program linear primal dengan funsi tujuan meminimumkan dan batasan ≥. Contoh :

Minimumkan $Z = 6x1 + 3x2$

Batasan $2x1 + 4x2 \geq 16$ nitrogen

$4x1 + 3x2 \geq 24$ fosfat

$x1, x2 \geq 0$

$x1$ = banyaknya pupuk extra-growth

$x2$ = banyaknya pupuk crop-fast

Z = total biaya pembelian pupuk.

Model dualnya adalah

Maksimumkan $Z = 16y1 + 24y2$

Batasan $2y1 + 4y2 \leq 6$ biaya dari extra-grawth

$4y1 + 3y2 \leq 3$ biaya dari crop-fast

$y1, y2 \geq 0$,

$y1$ = nilai marginal nitrogen; $y2$ = nilai marginal fosfat

- Tabel optimal simpleks untuk primal

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	6	3	0	0
			x1	x2	s1	s2
3	x2	8	4/3	1	0	-1/3
0	s1	16	10/3	0	1	-4/3
	Zj	24	4	3	0	-1
	Zj-cj		-2	0	0	-1

- Tabel optimal simpleks untuk dual

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	16	3	0	0
			y1	x2	s1	s2
0	s1	2	-10/3	0	1	-4/3
24	y2	1	4/3	1	0	1/3
	Zj	24	32	24	0	8
	Zj-cj		-16	0	0	-8

Tabel primal menunjukan bahwa 8 sak pupuk crop-fast sebaiknya dibeli dengan biaya $24. Tabel dual menunjukan bahwa nilai marginal fosfat adalah $1 sedangkan nitrogen tidak mempunyai nilai marginal.

3. Persoalan Batasan Campuran

Seandainya terdapat model program linear sebagai berikut :

Maksimumkan $Z = 10x1 + 6x2$

Batasan $x1 + 4x2 \leq 40$

$3x1 + 2x2 = 60$

$2x1 + x2 \geq 25$

$x1, x2 \geq 0$

Model dual diperoleh dari model primal dengan aturan: maksimisasi fungsi tujuan model primal semua batasan harus $\leq$ dan minimumisasi fungsi tujuan model primal semua batasan harus $\geq$.

Batasan pertama telah tepat.

Batasan kedua menjadi 2 batasan yaitu

$3x1 + 2x2 \leq 60$ dan

$3x1 + 2x2 \geq 60$ (dikalikan -1) menjadi $-3x1 - 2x2 \leq -60$

- Batasan terakhir $2x1 + x2 \geq 25$ dikalikan (-1) menjadi $-2x1 - x2 \leq -25$ sehingga model primalnya sudah dalam bentuk standar yaitu :

Maksimumkan $Z = 10x1 + 6x2$

Batasan $x1 + 4x2 \leq 40$

$3x2 + 2x2 \leq 60$

$-3x2 - 2x2 \leq -60$

$-x1 - x2 \leq -25$

$x1, x2 \geq 0$

Bentuk dualnya adalah

Minimumkan $Z = 40y1 + 60y2 - 60y3 - 25y4$

$y1 + 3y2 - 3y3 - y4 \geq 10$

$4y1 + 2y2 - 2y3 - y4 \geq 6$

$y1, y2, y3, y4 \geq 0$

B. Analisis Sensitivitas

1. Perubahan pada Koefisien Fungsi Tujuan

Menunjukan analisis sensitivitas pada koefisien fungsi tujuan dapat menggunakan kasus pembuatan meja dan kursi.

Maksimumkan $Z = 160x1 + 200x2$

Batasan $2x1 + 4x2 \leq 40$ jam kerja

$18x1 + 18x2 \leq 216$ pon kayu

$24x1 + 12x2 \leq 240$ m^2 tempat penyimpanan

$x1, x2 \geq 0$

Andaikan persamaan fungsi tujuan dirubah menjadi $Z=250x1+200x2$ maka solusi optimal akan berubah karena kemiringan dari garis fungsi tujuan berubah. Oleh karena itu dalam kasus ini akan dicari besarnya perubahan pada koefisien fungsi tujuan yang tidak menyebabkan perubahan solusi optimal.

- Tabel simpleks Optimal untuk kasus memproduksi meja dan kursi.

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200	0	0	0
			x1	x2	s1	s2	s3
200	x2	8	0	1	½	-1/18	0
160	x1	4	1	0	-1/2	1/9	0
0	s3	48	0	0	6	-2	1
	Zj	2.240	160	200	20	20/3	0
	cj-zj		0	0	-20	-20/3	0

- Andaikan perubahan pada c1 adalah Δ maka tabel simpleks optimal nya.

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	160 + Δ	200	0	0	0
			x1	X2	s1	s2	s3
200	x2	8	0	1	½	-1/18	0
160 + Δ	x1	4	1	0	-1/2	1/9	0
0	s3	48	0	0	6	-2	1
	Zj	2.240 + 4Δ	160 + Δ	200	20 - Δ/2	20/3 + Δ/9	0
	cj-zj		0	0	-20 + Δ/2	-20/3 - Δ/9	0

- Solusi akan tetap optimal selama nilai cj-Zj adalah negatif, jika cj-Zj bernilai positif maka solusi akan berubah, dan bila cj-Zj bernilai nol maka ada solusi alternatif

- Supaya solusi tetap optimal $-20+\Delta/2 < 0$ dan $-20/3-\Delta/9<0$ sehingga:

$-20+\Delta/2 < 0, \Delta/2 < 20, \Delta < 40$ … 1)

$-20/3-\Delta/9<0, -\Delta/9<0+20/3, \Delta > -60$ … 2)

Koefisien fungsi tujuan $c1 = 160 + \Delta$, sehingga $\Delta = c1 – 160$

Masukan persamaan 1) ke $\Delta = c1 – 160$, $c1 – 160 < 40$, $c1<200$.

Masukan persamaan 2) ke $\Delta = c1 – 160$, $c1 – 160 > -60$, $c1>100$.

Diperoleh $100 < c1 < 200$.

Selanjutnya tentukan perubahan c2 yang tidak dapat merubah solusi.

- Tabel simpleks optimal untuk $c2 = 200 + \Delta$

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200 + Δ	0	0	0
			x1	X2	s1	s2	s3
200 + Δ	x2	8	0	1	½	-1/18	0
160	x1	4	1	0	-1/2	1/9	0
0	s3	48	0	0	6	-2	1
	Zj	2.240 + 8Δ	160	200 + Δ	20 + Δ/2	20/3 - Δ/18	0
	cj-zj		0	0	-20 - Δ/2	-20/3 + Δ/18	0

- Persamaan $-20-\Delta/2<0$ dan $-20/3+\Delta/18<0$, sehingga

$-20-\Delta/2<0$, $-\Delta/2<20$, $\Delta>-40$ … 1)

$-20/3+\Delta/18<0$, $\Delta/18<20/3$, $\Delta<120$ … 2)

Koefisien fungsi $c2 = 200 + \Delta$ sehingga $\Delta = c2 - 200$

Persamaan 1) menjadi $c2-200 >-40$, $c2>160$

Persamaan 2) menjadi $c2-200<120$, $c2<320$. oleh karena itu diperoleh $160<c2<320$

Range-range c1 atau c2 memungkinkan untuk satu perubahan saja yaitu c1 atau c2 saja tidak berlaku jika keduanya berubah secara bersamaan.

2. Perubahan pada Nilai Kuantitas Batasan

Mempelajari pengaruh perubahan nilai kuantitas pada batasan dapat menggunakan contoh pembuatan meja dan kursi dengan model program linear sebagai berikut:

Maksimumkan Z = 160x1 + 200x2

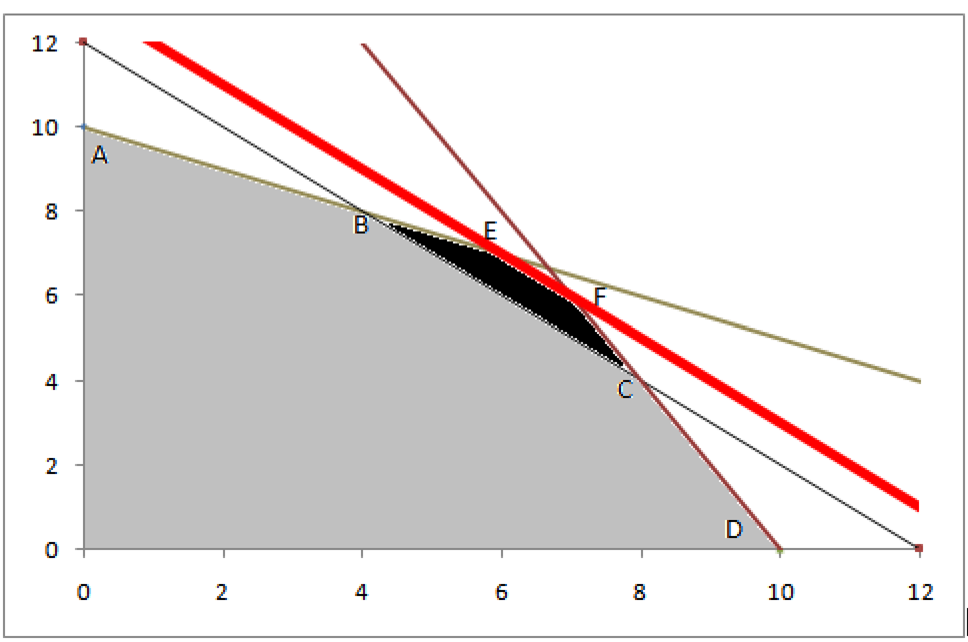
Batasan 2x1 +   4x2 ≤ 40 jam kerja

18x1 + 18x2 ≤ 216 pon kayu

24x1 + 12x2 ≤ 240 m^2 tempat penyimpanan

x1, x2 ≥ 0

Misalkan kuantitas diatas disebut q1 = 40, q2 = 216, dan q3 = 240,. Andaikan q2 diubah dari 216 menjadi 234 maka daerah solusinya akan berubah dari ABCD menjadi AEFD,lihat Gambar.



- Perubahan kuantitas dapat merubah daerah solusi, oleh karena itu salah satu tujuan analisis sensitifitas adalah untuk mempelajari sejauh mana qi dapat berubah sehingga solusi tetap feasible. Misalkan terdapat kenaikan jam tenaga kerja sebesar Δ maka batasan pertama menjadi $2x1+4x2 \leq 40+\Delta$.

- Tabel simpleks awalnya menjadi :

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200	0	0	0
			x1	x2	s1	s2	s3
0	s1	$40+\Delta$	2	4	1	0	0
0	s2	216	18	18	0	1	0
0	s3	240	24	12	0	0	1
	Zj	0	0	0	0	0	0
	cj-zj		160	200	0	0	0

- Tabel akhirnya adalah

cj	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200	0	0	0
			x1	X2	s1	s2	s3
200	x2	$8+\Delta/2$	0	1	½	-1/18	0
160	x1	$4-\Delta/2$	1	0	-1/2	1/9	0
0	s3	$48+6\Delta$	0	0	6	-2	1
	Zj	$2.240 + 20\Delta$	160	200	20	20/3	0
	cj-zj		0	0	-20	-20/3	0

- Salahsatu persyaratan metode simpleks adalah kuantitasnya bersifat positif oleh karena itu terdapat pertidaksamaan sbb:

$8 + \Delta/2 \geq 0$ … 1)

$4 - \Delta/2 \geq 0$ … 2)

$48+6\Delta \geq 0$ … 3)

Dari pers 1) $8 + \Delta/2 \geq 0$, $\Delta/2 \geq -8$, $\Delta \geq -16$

Dari pers 2) $4 - \Delta/2 \geq 0$, $-\Delta/2 \geq -4$, $\Delta \leq 8$

Dari pers 3) $48 + 6\Delta \geq 0$, $6\Delta \geq -48$, $\Delta \geq -8$

$q1 = 40 + \Delta$, $\Delta = q1 - 40$

Dari pers 1) $q1-40 \geq -16$, $q1 \geq 24$

Dari pers 2) $q1-40 \leq 8$, $q1 \leq 48$

Dari pers 3) $q1-40 \geq -8$, $q1 \geq 32$

Sehingga $32 \leq q1 \leq 48$

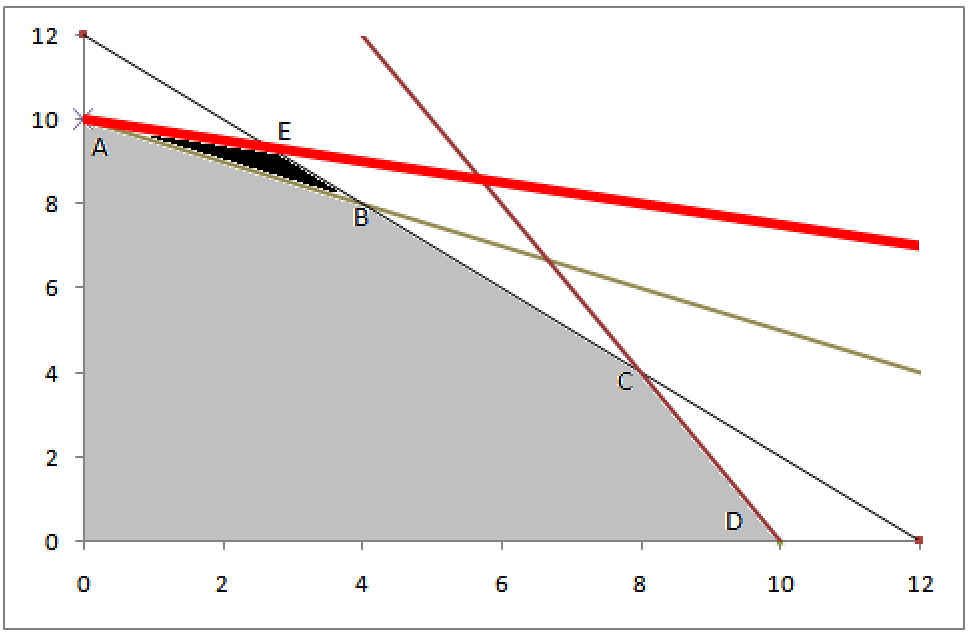
Selama q1 pada range ini solusi akan tetap positif dan feasible tetapi nilainya bisa berubah.

- Analisis sensitifitas untuk nilai kuantitas batasan dapat digunakan dalam hubungannya dengan solusi dual. Dalam contoh ini diperoleh $y1$ (nilai marginal tenaga kerja) = \$20, $y2$ (nilai marginal kayu) = \$6.67, dan $y3$ (nilai marginal tempat penyimpanan) = \$0. Nilai marginal yang paling besar adalah tenaga kerja. Berdasarkan range $32 \leq q1 \leq 48$ maka $q1$ dapat ditambah sebanyak 8. jika $q1$ ditambah sebanyak 8 maka nilai solusi $x2 = 8 + \Delta/2 = 8 + 8/2 = 12$, $x1 = 4 - \Delta/2 = 4 - 8/2 = 0$, dan $s3 = 48 + 6\ (8) = 96$. Laba total akan meningkat sebesar \$20 untuk setiap ekstra jam tenaga kerja.
- $Z = 2.240 + 20\Delta = 2.240 + 20\ (8) = \$2.400$

3. Perubahan Parameter Model Lainnya

Analisis sensitifitas tidak hanya merubah c_j dan q_i saja tapi juga koefisien peubah keputusan dari batasan. Misal batasan pertama dari $2x1 + 4x2 \leq 40$ jam menjadi $x1 + 4x2 \leq 40$ jam.

- Gambar grafik perubahan dari $2x1 + 4x2 \leq 40$ jam menjadi $x1 + 4x2 \leq 40$ jam.



- Daerah feasible awal adalah ABCD setelah diubah maka berubah menjadi AECD.