

Analysis Post-Optimal

B. Analisis Sensitivitas

1. Perubahan pada Koefisien Fungsi Tujuan

Menunjukkan analisis sensitivitas pada koefisien fungsi tujuan dapat menggunakan kasus pembuatan meja dan kursi.

Maksimumkan $Z = 160x_1 + 200x_2$

Batasan $2x_1 + 4x_2 \leq 40$ jam kerja

$18x_1 + 18x_2 \leq 216$ pon kayu

$24x_1 + 12x_2 \leq 240$ m² tempat penyimpanan

$x_1, x_2 \geq 0$

Andaikan persamaan fungsi tujuan dirubah menjadi $Z=250x_1+200x_2$ maka solusi optimal akan berubah karena kemiringan dari garis fungsi tujuan berubah. Oleh karena itu dalam kasus ini akan dicari besarnya perubahan pada koefisien fungsi tujuan yang tidak menyebabkan perubahan solusi optimal.



- ▶ Tabel simpleks Optimal untuk kasus memproduksi meja dan kursi.

c _j	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200	0	0	0
			x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃
200	x ₂	8	0	1	1/2	-1/18	0
160	x ₁	4	1	0	-1/2	1/9	0
0	s ₃	48	0	0	6	-2	1
	Z _j	2.240	160	200	20	20/3	0
	c _j -z _j		0	0	-20	-20/3	0

- ▶ Andaikan perubahan pada c₁ adalah Δ maka tabel simpleks optimal nya.

c _j	Variabel Dasar	Kuantitas	160 + Δ	200	0	0	0
			x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃
200	x ₂	8	0	1	1/2	-1/18	0
160 + Δ	x ₁	4	1	0	-1/2	1/9	0
0	s ₃	48	0	0	6	-2	1
	Z _j	2.240 + 4 Δ	160 + Δ	200	20 - $\Delta/2$	20/3 + $\Delta/9$	0
	c _j -z _j		0	0	-20 + $\Delta/2$	-20/3 - $\Delta/9$	0

- ▶ Solusi akan tetap optimal selama nilai c_j-Z_j adalah negatif, jika c_j-Z_j bernilai positif maka solusi akan berubah, dan bila c_j-Z_j bernilai nol maka ada solusi alternatif

- Supaya solusi tetap optimal $-20+\Delta/2 < 0$ dan $-20/3-\Delta/9 < 0$ sehingga:

$$-20+\Delta/2 < 0, \Delta/2 < 20, \Delta < 40 \dots 1)$$

$$-20/3-\Delta/9 < 0, -\Delta/9 < 0+20/3, \Delta > -60 \dots 2)$$

Koefisien fungsi tujuan $c_1 = 160 + \Delta$, sehingga $\Delta = c_1 - 160$

Masukan persamaan 1) ke $\Delta = c_1 - 160, c_1 - 160 < 40, c_1 < 200$.

Masukan persamaan 2) ke $\Delta = c_1 - 160, c_1 - 160 > -60, c_1 > 100$.

Diperoleh $100 < c_1 < 200$.

Selanjutnya tentukan perubahan c_2 yang tidak dapat merubah solusi.

- Tabel simpleks optimal untuk $c_2 = 200 + \Delta$

c _j	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200 + Δ	0	0	0
			x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃
200 + Δ	x ₂	8	0	1	1/2	-1/18	0
160	x ₁	4	1	0	-1/2	1/9	0
0	s ₃	48	0	0	6	-2	1
	Z _j	2.240 + 8Δ	160	200 + Δ	20 + Δ/2	20/3 - Δ/18	0
	c _j -z _j		0	0	-20 - Δ/2	-20/3 + Δ/18	0

► Persamaan $-20-\Delta/2 < 0$ dan $-20/3+\Delta/18 < 0$, sehingga

$-20-\Delta/2 < 0, -\Delta/2 < 20, \Delta > -40 \dots 1)$

$-20/3+\Delta/18 < 0, \Delta/18 < 20/3, \Delta < 120 \dots 2)$

Koefisien fungsi $c_2 = 200 + \Delta$ sehingga $\Delta = c_2 - 200$

Persamaan 1) menjadi $c_2 - 200 > -40, c_2 > 160$

Persamaan 2) menjadi $c_2 - 200 < 120, c_2 < 320$. oleh karena itu
diperoleh $160 < c_2 < 320$

Range-range c_1 atau c_2 memungkinkan untuk satu perubahan saja yaitu c_1 atau c_2 saja tidak berlaku jika keduanya berubah secara bersamaan.

2. Perubahan pada Nilai Kuantitas Batasan

Mempelajari pengaruh perubahan nilai kuantitas pada batasan dapat menggunakan contoh pembuatan meja dan kursi dengan model program linear sebagai berikut:



Maksimumkan $Z = 160x_1 + 200x_2$

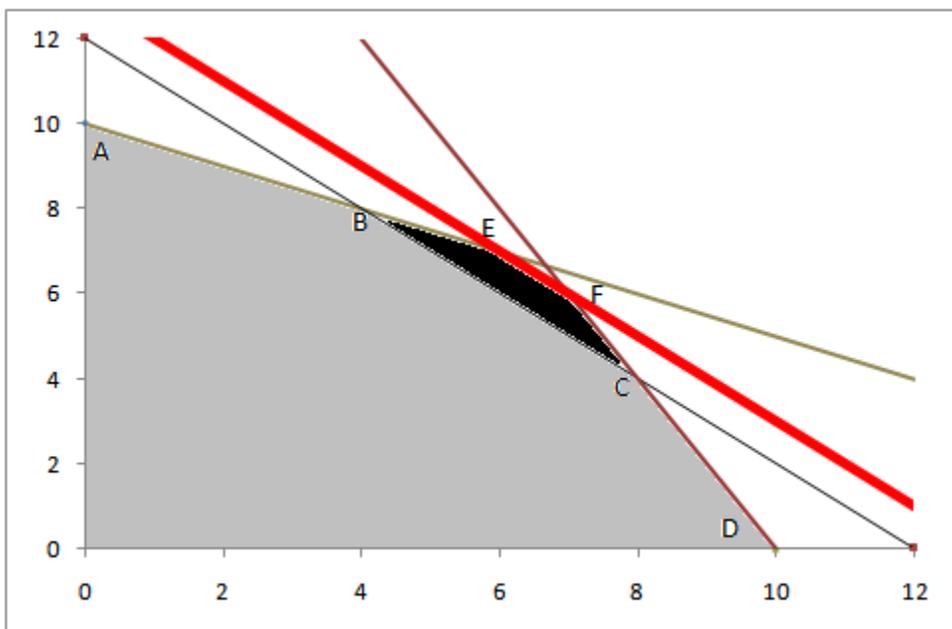
Batasan $2x_1 + 4x_2 \leq 40$ jam kerja

$18x_1 + 18x_2 \leq 216$ pon kayu

$24x_1 + 12x_2 \leq 240$ m² tempat penyimpanan

$x_1, x_2 \geq 0$

Misalkan kuantitas diatas disebut $q_1 = 40$, $q_2 = 216$, dan $q_3 = 240$,. Andaikan q_2 diubah dari 216 menjadi 234 maka daerah solusinya akan berubah dari ABCD menjadi AEF, lihat Gambar.



- ▶ Perubahan kuantitas dapat merubah daerah solusi, oleh karena itu salah satu tujuan analisis sensitifitas adalah untuk mempelajari sejauh mana q_i dapat berubah sehingga solusi tetap feasible. Misalkan terdapat kenaikan jam tenaga kerja sebesar Δ maka batasan pertama menjadi $2x_1 + 4x_2 \leq 40 + \Delta$.
- ▶ Tabel simpleks awalnya menjadi :

c _j	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200	0	0	0
			x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃
0	s ₁	40+ Δ	2	4	1	0	0
0	s ₂	216	18	18	0	1	0
0	s ₃	240	24	12	0	0	1
	Z _j	0	0	0	0	0	0
	c _j -z _j		160	200	0	0	0

- ▶ Tabel akhirnya adalah

c _j	Variabel Dasar	Kuantitas	160	200	0	0	0
			x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃
200	x ₂	8+ $\Delta/2$	0	1	1/2	-1/18	0
160	x ₁	4- $\Delta/2$	1	0	-1/2	1/9	0
0	s ₃	48+6 Δ	0	0	6	-2	1
	Z _j	2.240 + 20 Δ	160	200	20	20/3	0
	c _j -z _j		0	0	-20	-20/3	0

-
- ▶ Salahsatu persyaratan metode simpleks adalah kuantitasnya bersifat positif oleh karena itu terdapat pertidaksamaan sbb:

$$8 + \Delta/2 \geq 0 \dots 1)$$

$$4 - \Delta/2 \geq 0 \dots 2)$$

$$48 + 6\Delta \geq 0 \dots 3)$$

Dari pers 1) $8 + \Delta/2 \geq 0, \Delta/2 \geq -8, \Delta \geq -16$

Dari pers 2) $4 - \Delta/2 \geq 0, -\Delta/2 \geq -4, \Delta \leq 8$

Dari pers 3) $48 + 6\Delta \geq 0, 6\Delta \geq -48, \Delta \geq -8$

$$qI = 40 + \Delta, \Delta = qI - 40$$

Dari pers 1) $qI - 40 \geq -16, qI \geq 24$

Dari pers 2) $qI - 40 \leq 8, qI \leq 48$

Dari pers 3) $qI - 40 \geq -8, qI \geq 32$

Sehingga $32 \leq qI \leq 48$

Selama qI pada range ini solusi akan tetap positif dan feasible tetapi nilainya bisa berubah.



► Analisis sensitifitas untuk nilai kuantitas batasan dapat digunakan dalam hubungannya dengan solusi dual. Dalam contoh ini diperoleh y_1 (nilai marginal tenaga kerja) = \$20, y_2 (nilai marginal kayu) = \$6.67, dan y_3 (nilai marginal tempat penyimpanan) = \$0. Nilai marginal yang paling besar adalah tenaga kerja. Berdasarkan range $32 \leq q_1 \leq 48$ maka q_1 dapat ditambah sebanyak 8. jika q_1 ditambah sebanyak 8 maka nilai solusi $x_2 = 8 + \Delta/2 = 8 + 8/2 = 12$, $x_1 = 4 - \Delta/2 = 4 - 8/2 = 0$, dan $s_3 = 48 + 6 (8) = 96$. Laba total akan meningkat sebesar \$20 untuk setiap ekstra jam tenaga kerja.

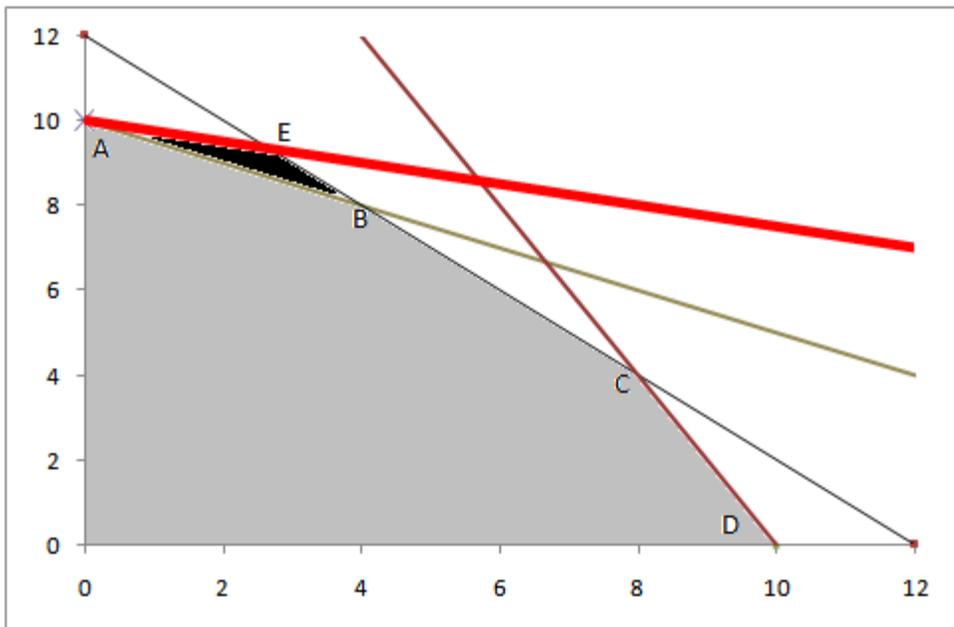
► $Z = 2.240 + 20\Delta = 2.240 + 20 (8) = \2.400

3. Perubahan Parameter Model Lainnya

Analisis sensitifitas tidak hanya merubah c_j dan q_i saja tapi juga koefisien peubah keputusan dari batasan. Misal batasan pertama dari $2x_1 + 4x_2 \leq 40$ jam menjadi $x_1 + 4x_2 \leq 40$ jam.



-
- ▶ Gambar grafik perubahan dari $2x_1 + 4x_2 \leq 40$ jam menjadi $x_1 + 4x_2 \leq 40$ jam.



- ▶ Daerah feasible awal adalah ABCD setelah diubah maka berubah menjadi AECD.
-
- ▶