MULTIVARIABEL TANPA KENDALA

Multivariable dalam artian ada banyak variable atau beberapa variable yang terpakai dalam menentukan fungsi objektif. Secara umum teknik yang digunakan pada optimasi satu dimensi dapat digunakan dalam optimasi multivariabel. Akan didefiniikan beberapa simbol yang akan dipakai;

(i) $f(x_{1,}x_2x_3, \ldots, x_n)$ akan ditulis sebagai $f(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X} = \{x_{1,}x_2x_3, \ldots, x_n\}^t$

(ii) $f(\boldsymbol{X}^*) = f(x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$

(iii) $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$ untuk $j = 1,2, \ldots n$

(iv) $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{C}$ setara dengan $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} = \{c_{1,}\, c_{2,} \ldots, c_n\}$

Teorema :

Jika f **(X)** mempunyai sebuah titik ekstrem (minimum maupun maximum) pada variable **X** = $\boldsymbol{X}^*$ dan jika derivasi pertama dari f (**X**) mempunyai nilai pada titik $\boldsymbol{X}^*$ **,** maka $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$

Perhatian : kebalikannya belum tentu benar yaitu jika $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ maka $\boldsymbol{x}^*$ adalah titik ekstrem.

Teorema :

Titik $\boldsymbol{X}^*$ disebut titik maksimum local dari f (**X**) jika dan hanya jika :

(i) $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*) < \mathbf{0}$ definit negatif dengan **H** = matrik Hessian yang didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \text{ dengan } h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

H adalah definit negatif jika dan hanya jika $(-1)^j |H|^j > 0$ untuk $j = 1,2, \ldots, n$

dengan $|H|^j = \det \begin{vmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{j1} & \cdots & h_{jj} \end{vmatrix}$, sehingga $h_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} \end{vmatrix} < 0$

$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix} > 0$ ..., *dst* , $(-1)^j\ |\mathbf{H}|^j > 0$

Teorema :

Titik $\mathbf{X}^*$ disebut titik minimul lokal dari f ($\mathbf{X}$) jika dan hanya jika :

(i) $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*) > \mathbf{0}$ definit positif atau $|\mathbf{H}|^j > 0$

Untuk j = 1, 2, .. , n sehingga

$h_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} \end{vmatrix} > 0$

$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix} > 0$ … , dst , $|\mathbf{H}|^j >$

Tabel 1.1 syarat untuk Maximum Lokal

Keadaan yang dipenuhi	$\boldsymbol{X}^*$ adalah minimum lokal
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. **$\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*) < \mathbf{0}$ (definit negatif)**	PASTI
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*) \leq \mathbf{0}$	MUNGKIN
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*)$ **tak tentu**	MUSTAHIL

Tabel 1.2 Syarat untuk Minimum Lokal

Keadaan yang dipenuhi	$\boldsymbol{X}^*$ adalah minimum local
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*) > \mathbf{0}$ **(definit positif)**	PASTI
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*) \geq \mathbf{0}$	MUNGKIN
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\mathbf{H}(\boldsymbol{X}^*)$ **tak tentu**	MUSTAHIL

Contoh soal.

Diketahui suatu fungsi dinyatakan dengan :

$$f(\boldsymbol{X}) = 2x_1^{\ 2} + 4x_2^{\ 2} - 2x_1x_2 - 1000x_1 - 4000x_2$$

Tentukan apakah fungsi tersebut fungsi maksimum atau fungsi minimum dan tentukan berapa nilai minimum atau maksimum dari fungsi tersebut.

Penyelesaian.