METODE KARUSH KUHN-TUCKER (KKT)

Pada tahun 1951, H.W Kuhn dan A.W Tucker mengemukakan suatu teknik optimasi yang dapat dipergunakan untuk mencari solusi optimum dari suatu fungsi yang berkendala tanpa memandang linier atau nonlinier yang disebut dengan Metode *Karush Kuhn-Tucker*.

Metode *Karush Kuhn-Tucker* dapat diterapkan dalam menyelesaikan permasalahan maksimum maupun minimum dengan kendalanya berupa pertidaksamaan. Dalam penyelesaian masalah menggunakan metode *Karush Kuhn-Tucker* juga diperlukan faktor pengali Lagrange yaitu λ.

Kelebihan dari metode ini dapat menyelesaikan masalah optimasi dengan kendala pertidaksamaan, sedangkan kelemahannya adalah dalam penyelesaian masalah dengan metode ini secara analitis memerlukan waktu yang relatif lama karena harus melakukan iterasi berkali-kali apabila tidak memenuhi syarat *Karush Kuhn-Tucker*.

Perbedaan metode *Karush Kuhn-Tucker* dengan metode *Langrange* adalah untuk penentuan nilai optimumnya, metode *Karush Kuhn-Tucker* hanya menggunakan satu tahap saja, sedangkangkan metode langrange mengunakan 2 tahap yaitu untuk mecari apakah nilainya itu definit negatif atau positif.

1. Syarat-syarat metode *Karush Kuhn-Tucker*

i. Kasus Minimasi

Minimumkan :

$Z = f(X)$ dengan $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}^t$

Dengan kendala :

$g_j(X) \leq 0$, dengan $j = 1,2,3, \dots, m$; $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}^t$

$X \geq 0$

$m \leq n$ (jumlah variabel pada kendala lebih kecil dari variabel pada fungsi tujuan)

1.1 Syarat-syarat metode *Karush Kuhn-Tucker* (Kasus Minimasi)

Turunkan terhadap masing-masing variabel x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,2, \dots , n)$$

Kendala dikalikan dengan Pengali Lagrange

$\lambda_j g_j = 0, \qquad (j = 1,2, \dots , m)$

Fungsi Kendala

a. $g_j \leq 0, \qquad (j = 1,2, \dots , m)$

b. $g_j \geq 0, \qquad (j = 1,2, \dots , m)$

Pengali Lagrange

a. $\lambda_j \geq 0, \qquad (j = 1,2, \dots , m)$

b. $\lambda_j \leq 0, \qquad (j = 1,2, \dots , m)$

ii. Kasus Maksimasi

Maksimumkan : $Z = f(X)$ dengan $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}^t$

Dengan kendala : $g_j(X) \leq 0,$ dengan $j = 1,2,3, \dots , m$; $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}^t$

$X \geq 0$

$m \leq n$ (jumlah variabel pada kendala lebih kecil dari variabel pada fungsi tujuan)

1.2 Syarat-syarat metode *Karush Kuhn-Tucker* (Kasus Minimasi)

Turunkan terhadap masing-masing variabel x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,2, \dots , n)$$

Kendala dikalikan dengan Pengali Lagrange

$\lambda_j g_j = 0, \qquad (j = 1,2, \dots , m)$

Fungsi Kendala

a. $g_j \leq 0, \qquad (j = 1,2,\dots,m)$

b. $g_j \geq 0, \qquad (j = 1,2,\dots,m)$

Pengali Lagrange

a. $\lambda_j \leq 0, \qquad (j = 1,2,\dots,m)$

b. $\lambda_j \geq 0, \qquad (j = 1,2,\dots,m)$

Contoh soal :

1. Minimumkan :

   $f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2$

   Dengan kendala :

   $x_1 + x_2 \leq 3$

   $-2x_1 + x_2 \leq 2$

   Penyelesaian

   Syarat *Karush Kuhn-Tucker*

   Pertama turunkan terhadap masing – masing variabel sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{g_j}{\partial x_i} (X) = 0 \qquad i = 1,2$$

$2x_1 - 4 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \qquad (1)$

$2x_2 - 6 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (2)$

Kemudian $\lambda_j g_j = 0$

$\lambda_1(x_1 + x_2 - 3) = 0 \qquad (3)$

$\lambda_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \qquad (4)$

$g_j \leq 0$

$x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \qquad (5)$

$-2x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \qquad (6)$

$\lambda_j \geq 0$

$\lambda_1 \geq 0$ (7)

$\lambda_2 \geq 0$ (8)

Kasus (I) : jika $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_1 \neq 0$ persamaan (1) dan (2) memberikan

$2x_1 - 4 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1 - 4 + \lambda_1 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2 - 0{,}5\lambda_1$ (9)

$2x_2 - 6 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_2 - 6 + \lambda_1 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 3 - 0{,}5\lambda_1$ (10)

Substitusi persamaan (9) dan (10) ke dalam persamaan (3), didapat

$$\lambda_1(x_1 + x_2 - 3) = 0$$

karena $\lambda_1 \neq 0$ maka $x_1 + x_2 - 3 = 0$

$$x_1 + x_2 - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow 2 - 0{,}5\lambda_1 + 3 - 0{,}5\lambda_1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \lambda_1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2$

Setelah memperoleh nilai lambda (λ_1), substitusikan nilai λ_1 ke dalam persamaan (9) dan (10), didapat

$x_1 = 2 - 0{,}5\lambda_1$

$= 2 - 0{,}5(2)$

$= 2 - 1$

$= 1$

$x_2 = 3 - 0{,}5\lambda_1$

$= 3 - 0{,}5(2)$

$= 3 - 1$

$= 2$

Selanjutnya lakukan uji nilai x_1 dan x_2 ke fungsi kendala pada persamaan (5) dan (6), didapat

$$x_1 + x_2 - 3 \leq^? 0$$

$1 + 2 - 3 \leq^? 0$

$0 = 0$ (benar)

-$2x_1 + x_2 - 2 \leq^? 0$

$-2(1) + 2 - 2 \leq^? 0$

$-2 < 0$ (benar)

selanjutnya lakukan uji nilai lambda ($\lambda_j \geq 0$)

$\lambda_1 = 2 \geq 0$ (benar)

$\lambda_2 = 0 \geq 0$ (benar)

Karena λ_1 dan λ_2 memenuhi syarat maka $f(x_1, x_2)$ optimum pada $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$ dengan nilai $f(x_1, x_2)$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1,\ x_1\right) &= x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 \\
&= 1^2 - 4(1) + 2^2 - 6(2) \\
&= 1 - 4 + 4 - 12 \\
&= -11
\end{aligned}
$$

2. Maksimumkan :

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 27x_1 + 45x_2 - 10x_3$$

Dengan kendala :

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 \leq 17{,}25$$

Penyelesaian :

Syarat *Karush Kuhn-Tucker*

Pertama turunkan terhadap masing – masing variabel sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0\ ; i = 1{,}2{,}3$$

$-2x_1 + 27 + \lambda_1 = 0$ (1)

$-4x_2 + 45 + \lambda_1 = 0$ (2)

$-10 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (3)

Kemudian $\lambda_j g_j = 0$

$\lambda_1(x_1 + x_2 - x_3) = 0 \quad (4)$

$\lambda_2(x_3 - 17{,}25) = 0 \quad (5)$

$g_j \leq 0$

$x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \quad (6)$

$x_3 - 17{,}25 \leq 0 \quad (7)$

$\lambda_j \leq 0$

$\lambda_1 \leq 0 \quad (8)$

$\lambda_2 \leq 0 \quad (9)$

Kasus (I) : jika $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_1 \neq 0$

Substitusi $\lambda_2 = 0$ ke persamaan (3), didapat

$$-10 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$-10 - \lambda_1 + 0 = 0$$

$$\lambda_1 = -10$$

Setelah memperoleh nilai λ_1 lalu substitusikan λ_1 ke persamaan (1), didapat

$$-2x_1 + 27 + \lambda_1 = 0$$

$$-2x_1 + 27 - 10 = 0$$

$$-2x_1 + 17 = 0$$

$$x_1 = \frac{17}{2}$$

Setelah memperoleh nilai λ_1 lalu substitusikan λ_1 ke persamaan (2), didapat

$$-4x_2 + 45 + \lambda_1 = 0$$

$$-4x_2 + 45 - 10 = 0$$

$$-4x_2 + 35 = 0$$

$$x_2 = \frac{35}{4}$$

Selanjutnya substitusi x_1, x_2, dan λ_1 ke persamaan (4), didapat

$\lambda_1(x_1 + x_2 - x_3) = 0$

$-10\left(\frac{17}{2} + \frac{35}{4} - x_3\right) = 0$

$-10\left(\frac{69}{4} - x_3\right) = 0$

$\frac{69}{4} - x_3 = 0$

$$x_3 \quad = \frac{69}{4}$$

Selanjutnya menguji nilai $g_j \geq 0$

$x_1 + x_2 - x_3 \leq^? 0$ (Pers. 6)

$\frac{17}{2} + \frac{35}{4} - \frac{69}{4} \leq^? 0$

$0 = 0$ (benar)

$x_3 - 17{,}25 \leq^? 0$ (Pers.7)

$\frac{69}{4} - 17{,}25 \leq^? 0$

$0 = 0$ (benar)

Selanjutnya menguji nilai lamda ($\lambda_j \leq 0$)

$\lambda_1 = -10$ (benar)

$\lambda_2 = 0$ (benar)

Karena λ_1 dan λ_2 memenuhi syarat maka $f(x_1, x_2)$ optimum pada $x_1 = \frac{17}{2}$ dan $x_2 = \frac{35}{4}$ dan $x_3 = \frac{69}{4}$ dengan nilai $f(x_1, x_2, x_3)$ sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 27x_1 + 45x_2 - 10x_3$$

$$= -\left(\frac{17}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{35}{4}\right)^2 + 27\left(\frac{17}{2}\right) + 45\left(\frac{35}{4}\right) - 10\left(\frac{69}{4}\right)$$

$$= 225\frac{3}{8}$$

Dengan menggunakan Mapple pada contoh soal sebelumnya, perhitungan dapat dilakukan dengan menggunakan perintah sebagai berikut

$> \ with\ (Optimization)$

$[Import\ MPS, Interactive, LPSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]$

$> \ NPLSolve(x1^2 - 4\,x1 + x2^2 + 6\,x2, \{x1 + x2 - 3 \leq 0, -2\,x1 + x2 - 2 \leq 0\})$

$$[-10.9999999999999982, [x1 = 0.9999999999999978, x2 = 1.9999999999999978]]$$

$> \ with\ (Optimization)$

$[Import\ MPS, Interactive, LPSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]$

$> \ NPLSolve(-x1^2 + 27\,x1 - 2\,x2^2 + \ 45\,x2 - 1010x3, \{x1 + x2 - x3 \leq 0, x3 - 17.25 \leq 0\}, maximize)$

$$\left[225.375000000000000, [x1 = 8.49999999999999822, x2 = 8.75000000000000000, x3 = 17.2500000000000000]\right]$$