Beberapa Penerapan Persamaan Diferensial Biasa

1. Peluruhan zat radioaktif

Berdasarkan hukum peluruhan zat radioaktif (F. Soddy & Ernest Rutherford), untuk sejumlah N zat radioaktif dengan konstanta peluruhan $\lambda > 0$ (bergantung jenis zat radioaktif), maka banyaknya zat radioaktif setiap saat diberikan oleh persamaan

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \tag{1}$$

di mana tanda (-) di ruas kanan menunjukkan bahwa banyaknya zat radioaktif $N(t)$ berkurang sepanjang waktu.

Waktu (periode) paruh T suatu zat radioaktif adalah waktu yang diperlukan zat tersebut banyaknya mencapai setengah dari banyak mula-mula zat tersebut. Jadi apabila banyak mula-mula zat adalah N_0, maka banyak zat tersebut pada saat T

$$N(T) = \frac{N_0}{2}.$$

Menyelesaikan persamaan (1) untuk $N(t)$ diperoleh

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

sehingga

$$N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

atau

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda T = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow T = \frac{1}{\lambda}\ln 2.$$

2. Pertumbuhan populasi

Thomas Robert Malthus (1798) menyatakan bahwa pertumbuhan populasi cenderung eksponensial menurut persamaan diferensial biasa berikut

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) \tag{2}$$

di mana a merupakan rata-rata pertumbuhan per satuan waktu. Model ini hanya berlaku apabila jumlah populasi jauh dari batas maksimumnya.

Untuk model pertumbuhan populasi yang memperhatikan jumlah maksimumnya diusulkan oleh Pierre Francois Verhulst (1838) yang disebut juga **model logistik** sebagai berikut.

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{3}$$

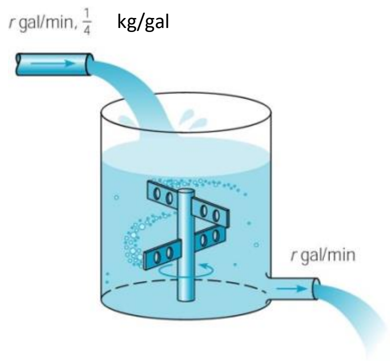
di mana K adalah ukuran maksimum populasi (*carrying capacity*).

3. Pencampuran larutan

Pelarutan garam pada tangki berisi air seperti diilustrasi oleh permasalahan berikut.

> Pada saat $t = 0$, sebuah tangki berisi garam sebanyak Q_0 kg yang dilarutkan dalam 100 galon air. Diasumsikan air yang mengandung garam sebanyak $\frac{1}{4}$ kg/galon air dialirkan ke dalam tangki dengan rata-rata r galon/menit dan keluar tangki dengan rata-rata alir yang sama.

Bagaimana model matematika perubahan konsentrasi/kandungan garam dalam larutan setiap waktu?



Konsentrasi garam dalam air dapat dimodelkan

$$\frac{dQ}{dt} = (rata - rata\ masuk) - (rata - rata\ keluar)$$

di mana

rata-rata masuk : $\frac{1}{4}$ kg/gal $\times$ r gal/menit = $\frac{r}{4}$ kg/menit

rata-rata keluar : $Q(t)$ kg/100 gal $\times$ r gal/menit = $\frac{Q(t)r}{100}$ kg/menit

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{Qr}{100}, \quad Q(0) = Q_{0.}$$