Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

DEPARTEMEN TEKNIK FISIKA - FTI

FUNGSI VARIABEL ACAK

Oleh: Aulia Siti Aisjah

Fs. VARIABEL ACAK

Capaian Pembelajaran:

Mampu menentukan karakteristik dari fungsi Variabel Acak

Kajian:

1. Fungsi Variabel acak
2. Karakteristik Fungsi Variabel Acak

Sebuah Var. acak X dengan fs distribusi probabilas f(x)

Mean: $E(X) = \mu = \sum_{\text{all } x} yf(x)$, maka untuk sembarang fs g(X), memp. sifat

Mean dari fungsi $g(X)$: $E[g(X)] = \sum_{\text{all } x} g(x)f(x) = \sum_{\text{all } x} g(x)f(x)$

Variansi: $V(X) = \sigma^2 = E[(X - E(X))^2] = E[(X - \mu)^2]$

$$= \sum_{\text{all } x} (x-\mu)^2 f(x) = \sum_{\text{all } y} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) f(x)$$

$$= \sum_{\text{all x}} x^2 f(x) - 2\mu \sum_{\text{all } x} x f(x) + \mu^2 \sum_{\text{all } x} f(x)$$

$$= E[X^2] - 2\mu(\mu) + \mu^2(1) = E[X^2] - \mu^2$$

Standard Deviasi: $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$

Bila diketahui Vektor variable acak X, akan mempuyai karakteristik:

$$\mathrm{E}\left(\vec{X}\right) := \begin{bmatrix} \mathrm{E}\left(X_1\right) \\ \mathrm{E}\left(X_2\right) \\ \dots \\ \mathrm{E}\left(X_n\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(A\vec{X} + \vec{b}\right) &= \begin{bmatrix} \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{1i}X_i + b_1\right) \\ \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{2i}X_i + b_2\right) \\ \dots \\ \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{mi}X_i + b_n\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_{1i}\mathrm{E}\left(X_i\right) + b_1 \\ \sum_{i=1}^{n} A_{2i}\mathrm{E}\left(X_i\right) + b_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} A_{mi}\mathrm{E}\left(X_i\right) + b_n \end{bmatrix} \\ &= A\,\mathrm{E}\left(\vec{X}\right) + \vec{b}. \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\left(A\vec{X} + \vec{b}\right) = A\,\mathrm{E}\left(\vec{X}\right) + \vec{b}.$$

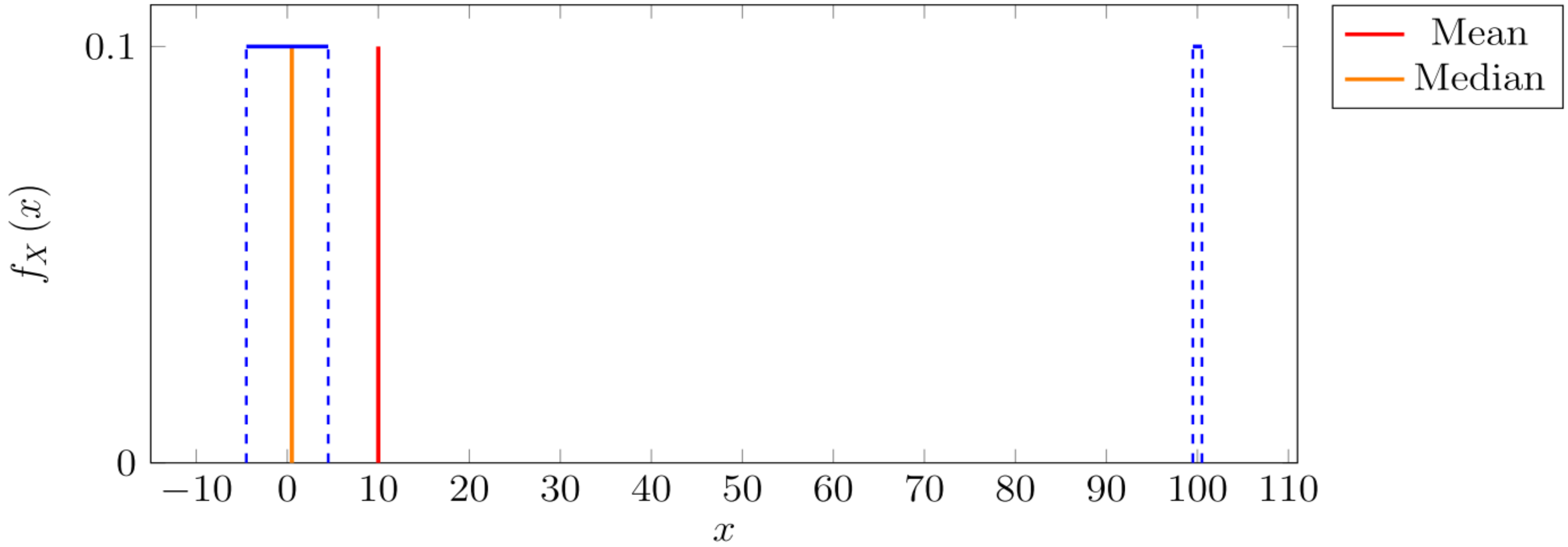
Definisi Median dari variable acak diskrit, yaitu sejumlah m, yang mana

$$P\left(X \leq m\right) \geq \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad P\left(X \geq m\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Definisi Median dari variable acak kontinyu, yaitu sejumlah m, yang mana

contoh

$$F_X\left(m\right) = \int_{-\infty}^{m} f_X\left(x\right)\ dx = \frac{1}{2}.$$



Example 3.6 (Mean vs median). Consider a uniform random variable X with support $[-4.5, 4.5] \cup [99.5, 100.5]$. The mean of X equals

$$\mathrm{E}(X) = \int_{x=-4.5}^{4.5} x f_X(x)\, \mathrm{d}x + \int_{x=99.5}^{100.5} x f_X(x)\, \mathrm{d}x \tag{28}$$

$$= \frac{1}{10} \frac{100.5^2 - 99.5^2}{2} \tag{29}$$

$$= 10. \tag{30}$$

The cdf of X between -4.5 and 4.5 is equal to

$$F_X(m) = \int_{-4.5}^{m} f_X(x)\, \mathrm{d}x \tag{31}$$

$$= \frac{m + 4.5}{10}. \tag{32}$$

$$\operatorname{Var}(a\,X+b)=a^2\operatorname{Var}(X)\,.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(a\,X+b) &= \operatorname{E}\left((a\,X+b-\operatorname{E}(a\,X+b))^2\right)\\
&= \operatorname{E}\left((a\,X+b-a\operatorname{E}(X)-b)^2\right)\\
&= a^2\operatorname{E}\left((X-\operatorname{E}(X))^2\right)\\
&= a^2\operatorname{Var}(X)\,.
\end{aligned}$$

Latihan

1. Diketahui Vari acak X dengan mean = 1 dan variansi = 1

Bila Y = 2 X + 4

Tentukan:

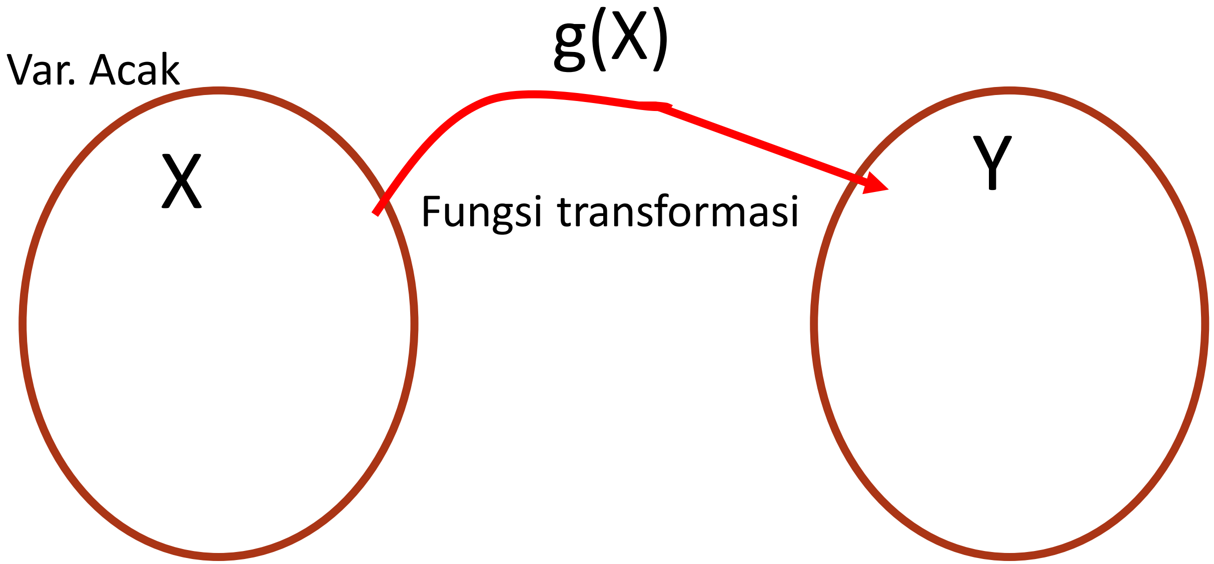
   a. Mean Y
   b. Variansi Y

2. Diketahui, X adalah sebuah sinyal listrik yang dikategorikan sebagai variable acak dengan mean = 9 ampere, dan variansi = 2 ampere$^{2.}$ Arus tersebut melalui sebuah beban resistor murni sebesar 10 ohm. Tentukan:

a. Mean dari tegangan pada beban
b. Variansi tegangan pada beban

FUNGSI VARIABEL ACAK

Variabel acak dapat berubah menjadi Var. acak yang lain



Karakteristik var acak X akan menentukan Karakteristik Var. acak Y

Karakteristik Y:

- f(y) (fs kerapatan Var. acak Y)
- $E(Y) = E(g(X))$
- $E(Y^2) = E(g(X)^2)$
- dst

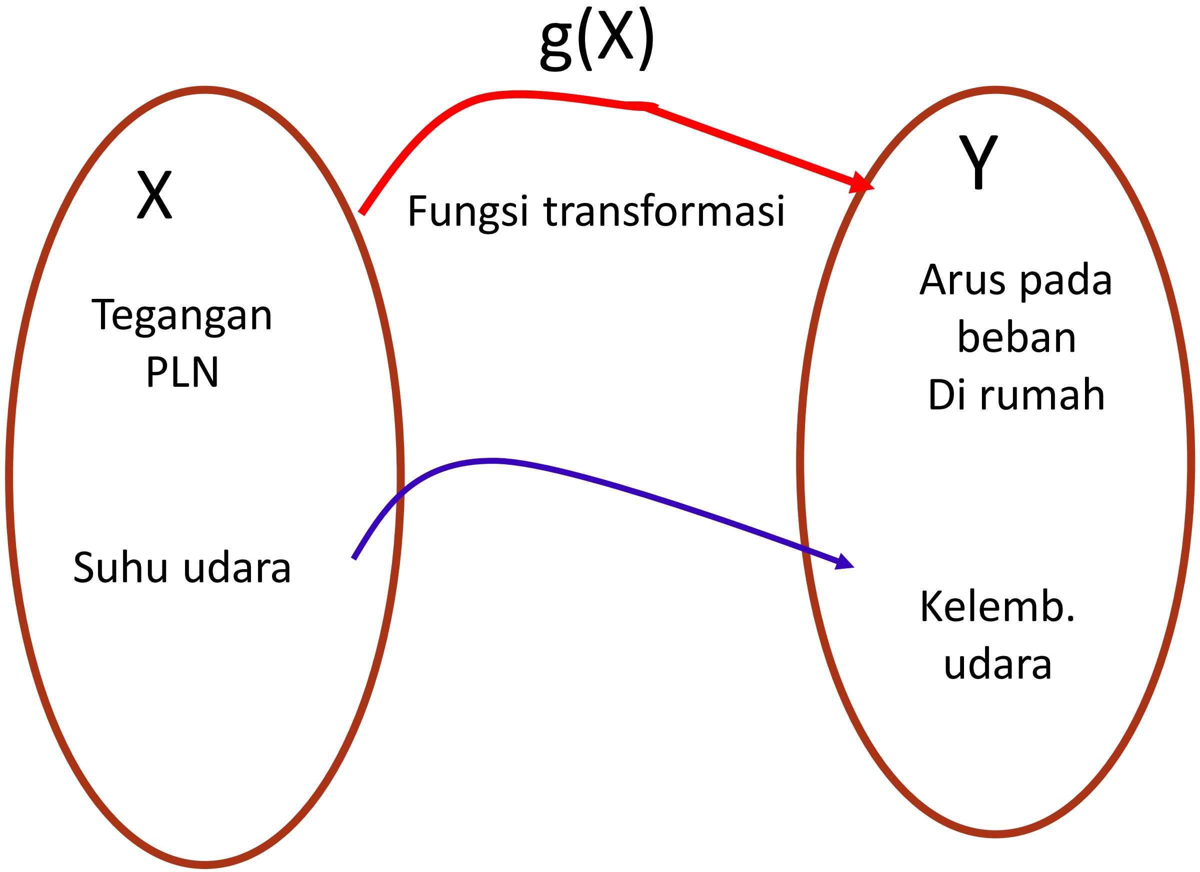
Example 4.4: Suppose that the number of cars X that pass through a car wash between 4:00 P.M. and 5:00 P.M. on any sunny Friday has the following probability distribution:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Let $g(X) = 2X-1$ represent the amount of money, in dollars, paid to the attendant by the manager. Find the attendant's expected earnings for this particular time period.

Solution: By Theorem 4.1, the attendant can expect to receive

$$E[g(X)] = E(2X-1) = \sum_{x=4}^{9}(2x-1)f(x)$$
$$= (7)\left(\frac{1}{12}\right) + (9)\left(\frac{1}{12}\right) + (11)\left(\frac{1}{4}\right) + (13)\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$+ (15)\left(\frac{1}{6}\right) + (17)\left(\frac{1}{6}\right) = \$12.67.$$


g(X)
X
Fungsi transformasi
Y
Tegangan
PLN
Arus pada
beban
Di rumah
Suhu udara
Kelemb.
udara

Contoh

Example 4.5: Let X be a random variable with density function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Find the expected value of $g(X) = 4X + 3$.

***Solution*:** By Theorem 4.1, we have

$$E(4X + 3) = \int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} (4x^3 + 3x^2)\, dx = 8.$$

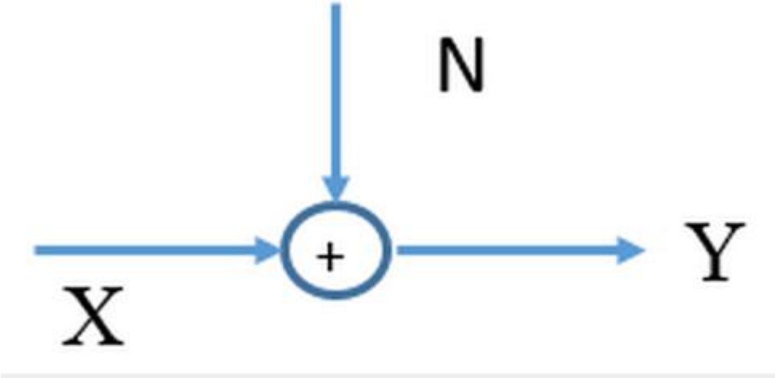
Latihan– Selesaikan secara Cepat

Sinyal X mendapat Noise N yang bersifat Additif

Bila sinyal X berdistribusi Uniform diantara 5 sd 10, dan Noise N juga berdistribusi Uniform diantara 1 sd 2

Tentukan:

a. Mean dari X
b. Mean dari N
c. Mean dari Y
d. Variansi dari Y



Materi

$$\text{Fungsi Linier}: \; g(X) = aX + b \quad (a, b \equiv \text{konstant})$$

$$E[aX + b] = \sum_{\text{all x}} (ax + b)\, p(x) =$$

$$= a \sum_{\text{all x}} x p(x) + b \sum_{\text{all x}} p(x) = a\mu + b$$

$$V[aX + b] = \sum_{\text{all x}} \left((ax + b) - (a\mu + b)\right)^2 p(x)$$

$$= \quad \sum_{\text{all } x} (ax - a\mu)^2 p(x) = \sum_{\text{all } x} \left[a^2 (y - \mu)^2\right] p(x)$$

$$= a^2 \sum_{\text{all } x} (y - \mu)^2 p(x) = a^2 \sigma^2$$

$$\sigma_{aX+b} = |a| \sigma$$

Latihan soal - Selesaikan

1. Diketahui, Variabel acak kontinyu X berdistribusi Uniform diantara 1 sd 5, Tentukan
   a. Mean dan variansi dari X
   b. Momen ke 2 dari X
2. Diketahui, Variabel acak kontinyu X berdistribusi Normal dengan mean dan variansi: 100 dan 10 Tentukan
   a. E(5X)
   b. E(2X + 10)

Materi

Theorem 4.2: The variance of a random variable X is

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

***Proof*:** For the discrete case, we can write

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)$$
$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x).$$

Since $\mu = \sum_x x f(x)$ by definition, and $\sum_x f(x) = 1$ for any discrete probability distribution, it follows that

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

For the continuous case the proof is step by step the same, with summations replaced by integrations. $\blacksquare$

Tugas - Upload Minggu, 25 Okt. 2020, Jam 24.00

1. Diketahui, sinyal PLN berdistribusi Uniform diantara 200 sd 240 Volt. Bila sinyal tersebut dikenakan pada beban Resistor murni sebesar 1 K ohm

a. Tentukan berapa rata-rata arus dan variansi arus
b. Tentukan berapa rata-rata daya yang didisipasikan oleh beban
c. Berapa probabilitas arus akan bernilai lebih dari 0,25 Ampere

2. Sebuah Variabel acak suhu udara di Kota Surabaya, berdistribusi uniform diantara 28 deg C sd 36 deg C.

a. Tentukan Mean dari Suhu udara kota Surabaya
b. Variansi suhu udara kota Surabaya

3. Bila pada pernyataan no 2, suhu tersebut ternyata mempengaruhi laju penguapan kadar air di dalam permukaan daun pada tanaman di kota Surabaya, dengan fungsi perubahan: q (T) = 0.01 – 0.02/T

a. Tentukan mean dari laju penguapan kadar air pada perm. daun
b. Tentukan variansi nya

Terimakasih