Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Model Sistem dalam Persamaan Keadaan

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Istilah-istilah Dalam Persamaan Keadaan

Analisis Sistem Kompleks

Persamaan Ruang Keadaan Orde-*n*, dengan Fungsi Penggerak *U*.

Ketidak unikan Himpunan Variabel Keadaan

Pengantar

•Pada bagian ini akan dibahas mengenai Persamaan Keadaan sebuah sistem dinamik / persamaan state space.

• Bentuk persamaan state space terdiri dari dua bentuk: yaitu persamaan keadaan sistem dan persamaan keluaran sistem

•Persamaan state space dapat digunakan untuk menganalisa karaktersitik sistem.

•Karaktersitik sistem dinyatakan dalam bentuk: ”Controllable dan Observable”.

Istilah-istilah Dalam Persamaan Keadaan

Keadaan(*state*) : himpunan terkecil dari variabel-variabel (disebut variabel keadaan) sedemikian rupa sehingga dengan mengetahui varibel-variabel ini pada $t=t_o$, bersama-sama dengan masukan untuk $t \geq t_o$, dapat menentukan secara lengkap perilaku sistem untuk setiap waktu $t \geq t_o$.

Variabel keadaan, variabel keadaan suatu sistem dinamik adalah himpunan terkecil dari variabel-varibel yang menentukan keadaan sistem dinamik.

Diperlukan n variabel $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ untuk melukiskan secara lengkap perilaku suatu sistem dinamik

Istilah-istilah Dalam Persamaan Keadaan

Vektor Keadaan : suatu vektor yang menentukan secara unik keadaan sistem $\mathbf{x}(t)$ untuk setiap $t \geq t_o$, setelah ditetapkan masukan $\mathbf{u}(t)$ untuk $t \geq t_o$.

Ruang keadaan : *R*uang *n* dimensi yang sumbu koordinatnya terdiri dari sumbu x_1, sumbu x_2,…, sumbu x_n

Analisis Sistem Kompleks

- Pada umumnya, teori pengendalian konvensional hanya dapat diterapkan pada sistem linier dengan parameter konstan dengan satu masukan dan satu keluaran dalam suatu hubungan transfer.

- Sistem modern yang komplek mungkin mempunyai beberapa masukan dan beberapa keluaran

- Untuk menganalisis sistem seperti ini, perlu penyederhanaan model matematik.

Analisis Sistem Kompleks

- Pendekatan yang paling sesuai pada analisis sistem kompleks adalah pendekatan *ruang keadaan*.
- Teori pengendalian modern berdasarkan pada diskripsi persamaan sistem dalam bentuk *n* persamaan diferensial orde pertama, yang dapat digunakan menjadi persamaan diferensial matrik-vektor orde pertama.

Persamaan Ruang Keadaan Orde-*n*, dengan Fungsi Penggerak *U*.

Persamaan diferensial orde-*n*

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots\ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u \qquad \text{(Pers. 1)}$$

Masukan *u*(*t*) untuk *t*≥0, dan nilai pada kondisi awal (t0), akan menentukan secara lengkap perilaku yang akan datang dari sistem, maka dapat dipilih sebagai himpunan *n* variabel keadaan.

Selanjutnya didefinisikan,

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \overset{(n-1)}{y}$$

Persamaan Ruang Keadaan Orde-*n*, dengan Fungsi Penggerak *U*.

selanjutnya persamaan 1 dapat dituliskan kembali sebagai berikut,

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$
$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \ldots - a_1 x_n + u$$

atau dalam bentuk persamaan ruang keadaan (matrik-vektor)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Konsep state space

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & .. & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan Ruang Keadaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

Persamaan Keluaran

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Materi

Persamaan Ruang Keadaan Orde-*n*, dengan Fungsi Penggerak *U*.

dimana,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & .. & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

persamaan keluaran menjadi,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

dimana, **C**=[1 0 ...0]

Untuk system kontinyu, persamaan state space

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y = \mathbf{C}X(t)$$

$$\frac{d}{dt}X(t) - \mathbf{A}X(t) = \mathbf{B}u(t)$$

$$sX(s) - \mathbf{A}X(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$(sI - \mathbf{A})X(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$X(s) = (sI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(sI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$= C(sI - A)^{-1}B$$

$$= C\frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)}B$$

Persamaan polynomial dalam s = akar – akar det(sI-A)=0
= eigen value dari (sI-A)
= pole – pole dr G(s)

Materi

Ketidak unikan Himpunan Variabel Keadaan

Himpunan variabel keadaan untuk suatu sistem adalah *tidak unik.* Artinya bahwa variabel keadaan bisa dipilih dari variabel keadaan yang saling tidak terkait.

Bila dipilih variabel keadaan :

$$\hat{X}_1 = X_1(x_{1,} x_2, ..., x_n)$$
$$\hat{X}_2 = X_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$\hat{X}_3 = X_3(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n$: tidak unik (terpisah)

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n$: unik (saling terkait)

Ketidak unikan Himpunan Variabel Keadaan

Jika **X** merupakan suatu vektor keadaan , maka :

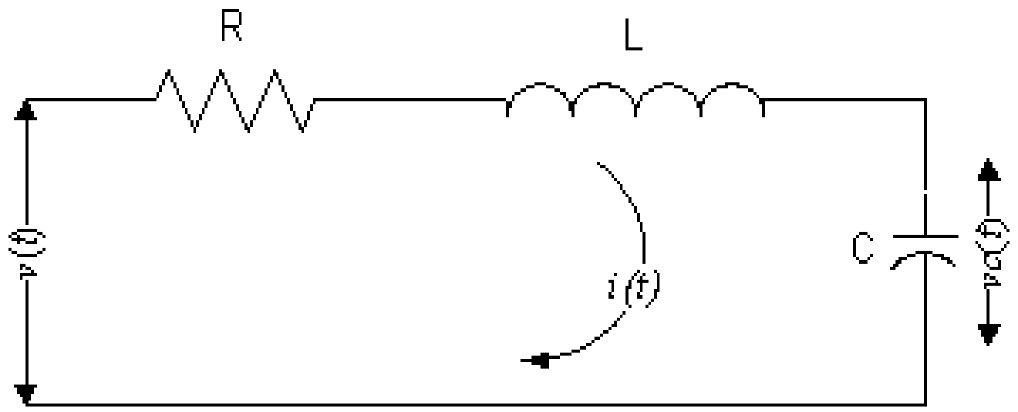
$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X}$$

Dimana **P** adalah matrik non singular.
Vektor–vektor keadaan yang berbeda membawa informasi yang sama memenuhi perilaku sistem.

Contoh Soal

Soal 1

Perhatikan sistem rangkaian RLC yang ditunjukan pada Gambar di bawah. Perilaku dinamika sistem dapat dilihat secara lengkap untuk $t \geq t_o$ jika harga-harga awal dari arus $i(t_o)$,tegangan kapasitor $v_c(t_o)$, dan tegangan masukan $v(t)$ untuk $t \geq t_o$ diketahui. Jadi keadaan rangkaian tersebut untuk $t \geq t_o$ dinyatakan sebagai $i(t)$, $v_c(t)$ dan tegangan masukan $v(t)$ untuk $v(t)$ untuk $t \geq t_o$. Maka dari itu, $i(t)$ dan $v_c(t)$ merupakan suatu himpunan variabel keadaan dari sistem tersebut.



Gambar Rangkaian RLC

Contoh Soal

Soal 1

Pada sistem ini bisa dipilih sebagai himpunan variabel keadaan:

- $x_1(t) = i(t)$
- $x_2(t) = v_c(t)$

Persamaan yang menggambarkan dinamika sistem elektrik RLC adalah,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + v_c = v$$

$$C\frac{dv_c}{dt} = i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [v]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$Y = [\,0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal

Soal 2

Sistem didefinisikan oleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

dimana *y* adalah keluaran dan *u* adalah masukan sistem.
Tentukan penyajian ruang keadaan dari sistem yang dinyatakan pada persamaan di atas.

Contoh Soal

Penyelesaian

Dipilih variabel keadaan sebagai berikut

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y}$$
$$x_3 = \ddot{y}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

Contoh Soal

Penyelesaian

Dengan menggunakan notasi matrik-vektor, tiga persamaan diferensial orde pertama ini dapat digabungkan menjadi satu sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} [u]$$

persamaan keluaran dinyatakan oleh

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal

Penyelesaian

persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk standar sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

dimana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

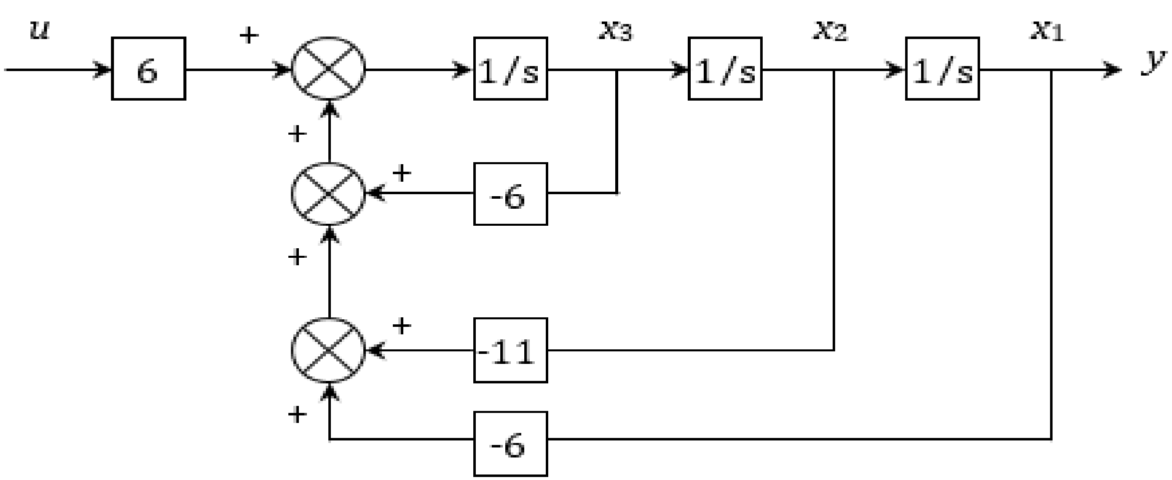
Contoh Soal

Penyelesaian

Penyajian diagram blok sistem contoh soal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Ringkasan

• Penggunaan metode ruang keadaan untuk analisis suatu sistem, sangat sesuai jika menggunakan komputer digital, karena pendekatannya adalah wawasan waktu. Sehingga terhindar dari kebosanan dan kesulitan pada saat terjadi perhitungan berulang dan lebih mudah untuk menyelesaikan sistem-sistem yang berorde tinggi.

•Sebuah sistem dengan 1 atau lebih masukan dan keluaran dapat dimodelkan dalam persamaan ruang keadaan (*state space*)

•Metode pendekatan ruang keadaan sangat baik digunakan untuk memodelkan sistem, menganalisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Latihan

Sistem didefinisikan oleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$$2\dddot{y} + 4\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 10u$$

dimana *y* adalah keluaran dan *u* adalah masukan sistem. Tentukan penyajian ruang keadaan dari sistem tersebut diatas.

SEKIAN

&

TERIMAKASIH