Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

Penyelesaian Persamaan Ruang Keadaan

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Teorema Cayley-Hamilton

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen Dengan Tranformasi Laplace

Pengantar

- Pada sub-bab ini akan dibahas teorema *Cayley-Hamilton* untuk menyelesaikan masalah-masalah yang melibatkan persamaan matrik transisi keadaan, persamaan homogen, dan pendekatan *laplace* pada persamaan keadaan homogen.
- Matrik transisi keadaan, merupakan matriks yang mencirikan suatu transisi dari variable-variabel state pada saat ti untuk beralih ke tj, dimana tj>ti

Teorema Cayley-Hamilton

Teorema ini digunakan untuk pembuktian yang melibatkan persamaan matrik atau menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan matrik.

Matrik **A*nxn***, dengan persamaan karakteristik

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

(Pers.1)

teorema Cayley-Hamilton: matrik **A** yang sesuai dengan persamaan karakteristiknya dinyatakan dengan bentuk persamaan sebagai berikut,

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \text{(Pers.2)}$$

Materi

Fungsi e^{at}

$$\frac{de^t}{dt}=e^t;\frac{de^{at}}{dt}=\frac{de^{at}}{d(at)}\frac{d(at)}{dt}=e^{at}a=ae^{at}$$

$$e^{at}=1+at+\tfrac{1}{2!}(at)^2+\cdots\tfrac{1}{k!}(at)^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{k!}$$

$$k!=k\times(k-1)\times\cdots\times 2\times 1$$

$$\frac{de^{at}}{dt}=\frac{d(1+at+\tfrac{1}{2}(at)^2+\cdots\tfrac{1}{k!}(at)^k+\cdots)}{dt}$$

$$=\frac{0+a+\tfrac{2}{2}(at)a+\cdots\tfrac{k}{k!}(at)^{k-1}a+\cdots)}{dt}=ae^{at}\qquad\text{(Pers.3)}$$

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

Persamaan diferensial Skalar

Persamaan diferensial skalar dinyatakan dengan bentuk sebagai berikut:

$$\dot{x} = ax \qquad \text{(Pers.4)}$$

dan penyelesaiannya dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_k t^k + ... \qquad \text{(Pers.5)}$$

Dari kedua persamaan diatas dilakukan substitusi sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^3 + ... + kb_k t^{k-1} + ... = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_k t^k + ...) \qquad \text{(Pers.6)}$$

Materi

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

Selanjutnya dengan menyamakan koefisien-koefisien dari suku-suku dengan pangkat *t* yang sama diperoleh:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_0$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}_0$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3\boldsymbol{x}2}\boldsymbol{a}^3\boldsymbol{b}_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\boldsymbol{b}_k = \frac{1}{\boldsymbol{k}!}\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{b}_0 \qquad \text{(Pers.7)}$$

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

dengan mensubtitusikan *t*=0 kedalam persamaan

$$b_1 + 2b_2t + 3b_3t^3 + \ldots. + kb_kt^{k-1} + \ldots. = a(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \ldots. + b_kt^k + \ldots.)$$

(Pers.8)

maka diperoleh **x**(0)=**b**$_0$, jadi jawab **x**(*t*) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$x(t) = (1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \ldots. + \frac{1}{k!}a^kt^k + \ldots.)x(0) = e^{at}x(0)$$

(Pers.9)

Persamaan diatas merupakan penyelesaian umum persamaan diferensial skalar dan mengandung suku eksponensial skalar.

Exponensial Matriks: e^{At}

$$e^{At} = I + At + \tfrac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots \tfrac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}$$

$$k! = k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$$\frac{de^{at}}{dt} = \frac{de^{at}}{d(at)} \frac{d(at)}{dt} = ae^{at}$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = \frac{de^{At}}{d(At)} \frac{d(At)}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A \qquad \text{(Pers.9)}$$

Materi

Bentuk deret dari e^{At}

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}(I + At + \tfrac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots \tfrac{1}{k!}A^kt^k + \cdots)$$

$$= 0 + A + \tfrac{1}{2}2tA^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}kt^{k-1}A^k + \cdots$$

$$= \mathrm{A} + \mathrm{A}^2t + \cdots + \tfrac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} + \cdots$$

$$= \mathrm{A}(\mathrm{I} + \mathrm{At} + \cdots \tfrac{1}{(\text{k-1})!}A^{k-1}t^{k-1} + \cdots)$$

$$= A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!} = Ae^{At}$$

$$= (\mathrm{I} + \mathrm{At} + \cdots \tfrac{1}{(\text{k-1})!}A^{k-1}t^{k-1} + \cdots)A$$

$$= (\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!})A = e^{At}A \qquad \text{(Pers.10)}$$

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

Persamaan diferensial Matrik Vektor

Persamaan diferensial matrik-vector:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{(Pers.11)}$$

dimana : **x** = vektor *n* dimensi.
A= matriks konstan*nxn*

Analogi dengan kasus skalar, berbentuk deret pangkat vektor dalam *t*, atau

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + ... + \mathbf{b}_k t^k + ... \qquad \text{(Pers.12)}$$

Materi

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

Substitusi pada pers (

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^3 + ... + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + ... = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + ... + \mathbf{b}_k t^k + ...)$$

(Pers.13)

Selanjutnya dengan menyamakan koefisien-koefisien dari suku-suku dengan pangkat *t* yang sama diperoleh:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3x2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0$$

$$....................$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0$$

(Pers.14)

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen

dengan mensubtitusikan t=0 kedalam persamaan $\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + ... + \mathbf{b}_k t^k + ...$, maka diperoleh $\mathbf{x}(0)=\mathbf{b}_0$, jadi jawab $\mathbf{x}(t)$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + ... + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + ...)\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \qquad \text{(Pers.15)}$$

Karena eksponensial matrik $e^{\mathbf{A}t}$ dalam analisis ruang keadaan sistem linier, maka berikut adalah beberapa sifat eksponensial matrik,

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} \quad jika \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} \quad jika \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \qquad \text{(Pers.16)}$$

Materi

Penyelesaian Umum Persamaan Keadaan Homogen Dengan Tranformasi Laplace

Pendekatan penyelesaian untuk persamaan diferensial skalar homogen dapat diperluas dengan persamaan keadaan homogen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \text{(Pers.17)}$$

dengan transformasi laplace sebagai berikut :

$$s\boldsymbol{X}(s)-\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \qquad \text{(Pers.18)}$$

dimana $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}]$. Selanjutnya

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) \qquad \text{(Pers.19)}$$

kedua persamaan (a) dan (b) dikalikan dengan $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$, maka diperoleh

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}(0) \qquad \text{(Pers.20)}$$

Contoh Soal

Persamaan keadaan sistem linier *time invariant* yang dinyatakan dalam bentuk berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Bila diberikan kondisi awal dari variabel keadaan adalah :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

Tentukan **x**(t) dan y(t) jika r(t) adalah fungsi step.

Contoh Soal

Penyelesaian

$$x(t) = \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots\right)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \left(I + A(t-\tau) + \frac{1}{2!}A^2(t-\tau)^2 + \cdots\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1).\,d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & t & 0\\0 & 0 & t\\-6t & -11t & -6t\end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & t & 0\\0 & 0 & t\\-6t & -11t & -6t\end{bmatrix}^2 + \cdots\right)\boldsymbol{x}(0)$$
$$+ \int_0^t \varphi(t-\tau)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}d\tau$$

$$= \left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & t & 0\\0 & 0 & t\\-6t & -11t & -6t\end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & 0 & t^2\\-6t^2 & -11t & -6t^2 + 66t^2\\36t^2 & -6t^2 + 66t^2 & -11t^2 + 36t^2\end{bmatrix} + \cdots\right)\boldsymbol{x}(0)$$
$$+ \int_0^t \varphi(t-\tau)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}d\tau$$

Contoh Soal

Penyelesaian

$$= \left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\\ -6t & -11t & -6t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0.5t^2\\ -3t^2 & -5.5t & 30t^2\\ 18t^2 & 30t^2 & 12.5t^2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} d\tau$$

$$= \left(\begin{bmatrix}1 & -t & 0.5t^2\\ -3t^2 & 1-5.5t & t+30t^2\\ -6t & -11t+30t^2 & 1-6t+12.5t^2\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\0.5\\-0.5\end{pmatrix} + \int_0^t \varphi(t-\tau)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} d\tau$$

$$= \begin{pmatrix}1-0.5t-0.25t^2\\ -3t^2+0.5(1-5.5t)-0.5(t+30t^2)\\ -6t+0.5(-11t+30t^2)-0.5(1-6t+12.5t^2)\end{pmatrix} + \int_0^t \varphi(t-\tau)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} d\tau$$

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0.5t-0.25t^2\\ -3t^2+0.5(1-5.5t)-0.5(t+30t^2)\\ -6t+0.5(-11t+30t^2)-0.5(1-6t+12.5t^2)\end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix}1 & -t+\tau & 0.5(t-\tau)^2\\ -3(t-\tau)^2 & 1-5.5(t-\tau) & (t-\tau)+30(t-\tau)^2\\ -6(t-\tau) & -11(t-\tau)+30(t-\tau)^{2\,2} & 1-6(t-\tau)+12.5(t-\tau)^{2\,2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} d\tau$$

Contoh Soal

Penyelesaian

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0.5t - 0.25t^2 \\ -3t^2 + 0.5(1 - 5.5t) - 0.5(t + 30t^2) \\ -6t + 0.5(-11t + 30t^2) - 0.5(1 - 6t + 12.5t^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - \frac{1}{3}t^3 \\ \frac{27}{2}t - \frac{9}{4}t^2 - 16t^3 \\ t - \frac{23}{2}t^2 - 25t^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{65}{4}t - \frac{81}{4}t^2 - 16t^3 \\ \frac{1}{2} - \frac{7}{2}t - \frac{11}{4}t^2 - 25t^3 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal

Penyelesaian

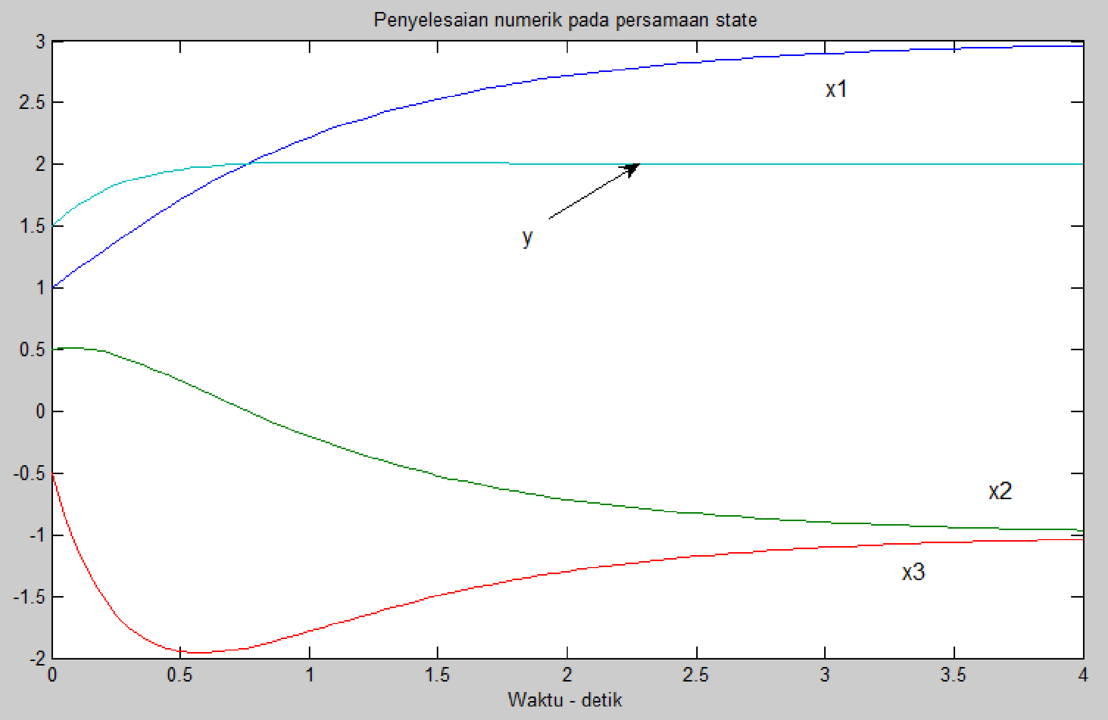
Program Matlab pada contoh soal tersebut,

```
A=[0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
B=[1;1;1]; C=[1 1 0]; D=0;
x0=[1 .5 -0.5]; t=0:0.05:4;
U=ones(1, length(t));  % menghasilkan vektor baris u(t)
[y,x]=lsim(A,B,C,D,U,t,x0);
plot(t,x,t,y);
title('Penyelesaian numerik pada persamaan state'),
xlabel('Waktu - detik')
```

Contoh Soal

Penyelesaian

Keluaran dari program Matlab seperti terlihat pada gambar di bawah :



Ringkasan

1. Untuk menyelesaikan persamaan keadaan homogen dapat diselesaikan dengan teorema: **Teorema Cayley-Hamilton**

2. Penyelesaian persamaan keadaan sistem, dapat dilakukan dengan menggunakan function **[y,x] = impulse(A,B,C,iu,t)** dan **[y,x] = step(A,B,C,D,iu,t)** dimana kedua fungsi tersebut akan menghasilkan respon impulse dan respon step

Latihan

Persamaan keadaan sistem linier *time invariant* yang dinyatakan dalam bentuk berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -6 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

Bila diberikan kondisi awal dari variabel keadaan adalah :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Tentukan **x**(t) dan y(t) jika r(t) adalah fungsi step.

SEKIAN

&

TERIMAKASIH