Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

Matrik Transisi Keadaan

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Pengantar

Pada sub-bab ini akan dibahas mengenai matrik transisi keadaan. Matrik ini merepresentasikan gerak bebas suatu sistem. Kemudian sifat matrik transisi keadaaan juga akan dibahas pada sub bab ini.

Matrik Transisi Keadaan

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots\right]\mathbf{x}(0) \qquad \text{(Pers. 1)}$$

Persamaan keadaan homogen di atas dapat dinyatakan dengan pernyataan sebagai berikut,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \qquad \text{(Pers. 2)}$$

dimana $\Phi(t)$ adalam matrik *nxn* dan merupakan jawab unik dari,

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \qquad dan \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$$

dan $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

Matrik Transisi Keadaan

$$X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}} X(0) + \int_0^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

Saat masukan = 0, Pada t = t_0 diperoleh

$$X(t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}_0} X(0) + \int_0^{t_0} e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

$$= e^{At_0} X(0)$$

$$X(0) = e^{-At_0} X(t_0)$$ (Pers. 3)

Matrik Transisi Keadaan

$x(t) = e^{at} x(0)$ (Pers. 3)

Dari persamaan 1,2 dan 3

Diperoleh:

$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$ (Pers.4)

$\Phi(t)$ disebut *matrik transisi keadaan*

Matrik transisi keadaan mengandung semua informasi mengenai gerak bebas sistem yang didefinisikan oleh persamaan 3

Matrik Transisi Keadaan

- Jika *eigenvalue* λ_1, λ_2, ….,λ_n dari matrik **A** berbeda, maka $\mathbf{\Phi}(t)$ akan mengandung eksponensial, . Khususnya jika matrik **A** merupakan matrik diagonal, maka

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

(**A**:matrik diagonal)

•Jika ada *eigenvalue* rangkap, misal jika *eigenvalue* dari matrik **A** adalah λ_1,λ_1, λ_1, λ_4,λ_5,….,λ_n maka disamping akan mengandung , juga akan mengandung suku .

Matrik Transisi Keadaan

Penyelesaian Persamaan state, dengan $X(t_0)$ diketahui

$$X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}} X(0) + \int_0^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1)dt_1$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{At}} e^{-At_0} X(t_0) + \int_0^{t_0} e^{A(t-t_1)} Bu(t_1)dt_1 + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1)dt_1$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{A(t-t_0)}} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1)dt_1$$

$$X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A(t-t_0)}} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1)dt_1$$

Matrik Transisi Keadaan

Persamaan keluaran system, y(t)

$$y(t) = CX(t) = C(\mathrm{e}^{\mathrm{A(t\text{-}t_0)}} X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1)$$

$$= C(\phi(t-t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t-t_1) Bu(t_1) dt_1$$

Matriks $e^{At} = \phi(t)$: Matriks Transisi.

Materi

Matrik Transisi Keadaan

Berikut beberapa sifat matrik keadaan,

1. $\Phi(0) = e^{A0} = \mathbf{I}$
2. $\Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$ *atau* $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3. $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
4. $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$
5. $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$

Contoh Soal 1

Tentukan matriks transisi keadaan $\Phi(t)$ berdasarkan persamaan keadaan berikut ini,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 1

Penyelesaian

Matrik **A** dari persamaan keadaan sistem tersebut adalah,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

matrik transisi keadaan $\Phi(t)$ dinyatakan oleh,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$$

karena
$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 1

Penyelesaian

Kebalikan dari (s**I**-**A**) diberikan oleh

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu,

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]=\begin{bmatrix} (2e^{-t}-e^{-2t}) & (e^{-t}-e^{-2t}) \\ (-2e^{-t}+2e^{-2t}) & (-e^{-t}+2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengingat bahwa $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$, maka kita peroleh kebalikan dari matrik transisi keadaan tersebut sebagai berikut,

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=e^{-\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} (2e^{t}-e^{2t}) & (e^{t}-e^{2t}) \\ (-2e^{t}+2e^{2t}) & (-e^{t}+2e^{2t}) \end{bmatrix}$$

Ringkasan

1. Matriks transisi keadaan dinyatakan sebagai: $\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$
2. Sifat dari matriks transisi adalah:

$$1.\ \Phi(0) = e^{A0} = I$$

$$2.\ \Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1} \ \text{atau}\ \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$3.\ \Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

$$4.\ [\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$$

$$5.\ \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$$

Latihan

1. Tentukan matrik transisi keadaan $\Phi(t)$ dari sistem berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan matriks transisi keadaan dan persamaan keluaran system dari bentuk persamaan keadaan di bawah ini

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

SEKIAN

&

TERIMAKASIH