



**Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya**



# **Matrik Transisi Keadaan**

**Pengantar**

**Materi**

**Contoh Soal**

**Ringkasan**

**Latihan**

**Asesmen**

## Pengantar

Pada sub-bab ini akan dibahas mengenai matrik transisi keadaan. Matrik ini merepresentasikan gerak bebas suatu sistem. Kemudian sifat matrik transisi keadaan juga akan dibahas pada sub bab ini.



### Matrik Transisi Keadaan

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \dots\right]\mathbf{x}(0) \quad (\text{Pers. 1})$$

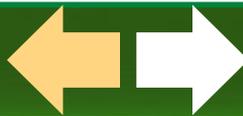
Persamaan keadaan homogen di atas dapat dinyatakan dengan pernyataan sebagai berikut,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \quad (\text{Pers. 2})$$

dimana  $\mathbf{\Phi}(t)$  adalah matrik  $n \times n$  dan merupakan jawab unik dari,

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \quad \text{dan} \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$$

$$\text{dan} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$



**Matrik Transisi Keadaan**

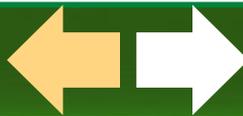
$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

Saat masukan = 0, Pada  $t = t_0$  diperoleh

$$X(t_0) = e^{At_0} X(0) + \int_0^{t_0} e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

$$= e^{At_0} X(0)$$

$$X(0) = e^{-At_0} X(t_0) \quad (\text{Pers. 3})$$



## Matrik Transisi Keadaan

$$x(t) = e^{at} x(0) \quad (\text{Pers. 3})$$

Dari persamaan 1,2 dan 3

Diperoleh:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] \quad (\text{Pers.4})$$

$\Phi(t)$  disebut *matrik transisi keadaan*

Matrik transisi keadaan mengandung semua informasi mengenai gerak bebas sistem yang didefinisikan oleh persamaan 3



## Matrik Transisi Keadaan

- Jika *eigenvalue*  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dari matrik **A** berbeda, maka  $\Phi(t)$  akan mengandung eksponensial, . Khususnya jika matrik **A** merupakan matrik diagonal, maka

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}: \text{matrik diagonal})$$

- Jika ada *eigenvalue* rangkap, misal jika *eigenvalue* dari matrik **A** adalah  $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_n$  maka disamping akan mengandung , juga akan mengandung suku .



### Matrik Transisi Keadaan

Penyelesaian Persamaan state, dengan  $X(t_0)$  diketahui

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

$$= e^{At} e^{-At_0} X(t_0) + \int_0^{t_0} e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1 + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

$$= e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1$$



### Matrik Transisi Keadaan

Persamaan keluaran system,  $y(t)$

$$y(t) = CX(t) = C(e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} Bu(t_1) dt_1)$$

$$= C(\phi(t-t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-t_1) Bu(t_1) dt_1)$$

Matriks  $e^{At} = \phi(t)$  : Matriks Transisi.



## Matrik Transisi Keadaan

Berikut beberapa sifat matrik keadaan,

1.  $\Phi(0) = e^{A0} = \mathbf{I}$
2.  $\Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$  atau  $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3.  $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
4.  $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$
5.  $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$



## Contoh Soal 1

Tentukan matriks transisi keadaan  $\Phi(t)$  berdasarkan persamaan keadaan berikut ini,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



## Contoh Soal 1

## Penyelesaian

Matrik  $\mathbf{A}$  dari persamaan keadaan sistem tersebut adalah,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

matrik transisi keadaan  $\Phi(t)$  dinyatakan oleh,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

karena

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$



## Contoh Soal 1

## Penyelesaian

Kebalikan dari  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  diberikan oleh

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Dengan mengingat bahwa  $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ , maka kita peroleh kebalikan dari matrik transisi keadaan tersebut sebagai berikut,

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (2e^t - e^{2t}) & (e^t - e^{2t}) \\ (-2e^t + 2e^{2t}) & (-e^t + 2e^{2t}) \end{bmatrix}$$



## Ringkasan

1. Matriks transisi keadaan dinyatakan sebagai:  $\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$
2. Sifat dari matriks transisi adalah:

1.  $\Phi(0) = e^{A0} = I$
2.  $\Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$  atau  $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3.  $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
4.  $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$
5.  $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$



## Latihan

1. Tentukan matrik transisi keadaan  $\Phi(t)$  dari sistem berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan matriks transisi keadaan dan persamaan keluaran system dari bentuk persamaan keadaan di bawah ini

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



**SEKIAN  
&  
TERIMAKASIH**

