Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

Matrik Alih

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Pengantar

- Dalam Persamaan Ruang Keadaan berdimensi n, teradapat n variable keadaan saat t = to, dan saat t sebarang.
- Sebuah fungsi dalam t, yang berfungsi mentransformasikan variable keadaan untuk setiap waktu t.
- Fangsi transformasi ini dinamakan sebagai Matriks Alih

Matrik Alih

Konsep *matrik alih* merupakan perluasan dari konsep *fungsi alih*. Terlebih dahulu mari kita perhatikan persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$
(Pers.1)

dimana, **x** = vektor keadaan (*n*-vektor)
u = vektor pengendali (*r*-vektor)
y = vektor keluaran (*m*-vektor)
A = matrik *n* x *n*.
B = matrik *n* x *r*.
C = matrik *m* x *n*.
D = matrik *m* x *r*.

Matrik Alih

Transformasi persamaan 1 adalah

$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s)$
$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s)$

Dengan mengambil kondisi awal $\mathbf{x}(0)=0$ dan mensubtitusikan kedalam kedua persamaan tersebut, diperoleh

$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$

Dengan demikian diperoleh **matrik alih** sebagai berikut,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \qquad \text{(Pers. 2)}$$

Matrik Alih

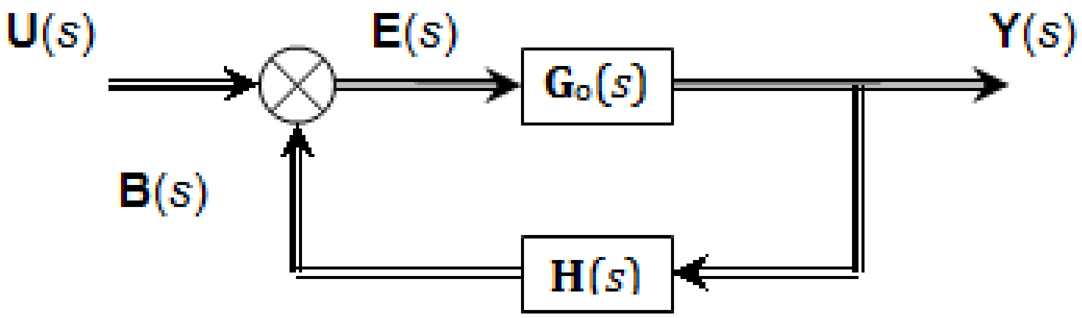
Perhatikan bahwa ruas kanan dari persamaan 2 melibatkan (s**I**-**A**)$^{-1}$. Oleh karena itu **Matriks Alih G**(s) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\mathbf{G}(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \qquad \text{(Pers. 3)}$$

dimana $Q(s)$ adalah polynomial dalam s. Oleh karena itu, |s**I**-**A**| sama dengan polynomial karakteristik dari **G**(s). Dengan kata lain *eigenvalue* dari **A** identik dengan pole-pole dari **G**(s).

Matrik Alih Sistem Loop

Sistem multi-masukan-multi-keluaran (MIMO) seperti yang diperlihatkan pada gambar di bawah ini



Matrik alih lintasan umpan maju adalah $\mathbf{G}_o(s)$, sedangkan pada lintasan umpan baliknya adalah $\mathbf{H}(s)$.

Matrik Alih Sistem Loop

Matrik alih antara vektor sinyal umpan balik **B**(s) dan vektor kesalahan **E**(s) diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(s) &= \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s)\\ &= \mathbf{H}(s)\mathbf{G}_o(s)\mathbf{E}(s)\end{aligned}$$

Matrik alih antara **B**(s) dan **E**(s) adalah $\mathbf{H}(s)\mathbf{G}_o(s)$.

Matrik Alih Loop Tertutup

Matrik alih elemen-elemen yang terhubung seri (*cascade*) merupakan hasil perkalian dari matrik alih masing-masing elemennya.

Matrik lup tertutup :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_o(s)[\mathbf{U}(s) - \mathbf{B}(s)] = \mathbf{G}_o(s)[\mathbf{U}(s) - \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s)]$$

atau,

$$[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_o(s)\mathbf{U}(s)$$

Kedua ruas persamaan terakhir dikalikan dengan $[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}$, dihasilkan

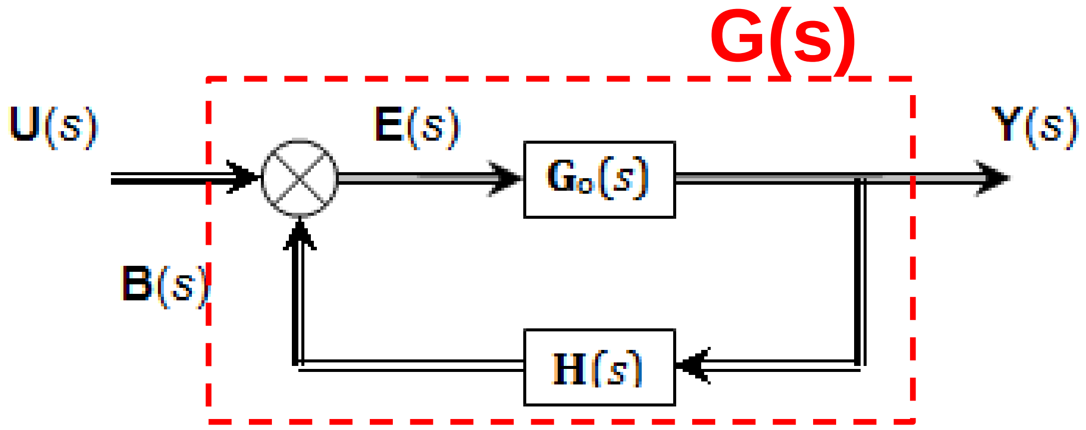
$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\, \mathbf{G}_o(s)\mathbf{U}(s)$$

$$\frac{\boldsymbol{Y(s)}}{\boldsymbol{U(s)}} = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G_0(s)H(s)}\right)^{-1}\boldsymbol{G_0(s}\Big)$$

Matrik Alih Sistem Loop

Maka *matrik alih lup tertutup* diperoleh,

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}_o(s)$$



Non-interaksi dalam Sistem Multi-Input-Multi-Output (MIMO)

• Beberapa sistem pengendalian pada proses mempunyai multi-masukan-multi keluaran (MIMO)
• Sering digunakan bahwa perubahan pada satu masukan acuan hanya mempengaruhi satu keluaran.

•Jika non-interaksi tersebut dapat dicapai, maka akan mempermudah dalam menjaga tiap harga keluaran pada harga konstan yang diinginkan tanpa adanya gangguan-gangguan eksternal.

Non-interaksi dalam Sistem Multi-Input-Multi-Output (MIMO)

•Perhatikan matrik alih plant $\mathbf{G}_p(s)$ (matrik *n*x*n*) dan dirancang suatu kompensator seri $\mathbf{G}_c(s)$ (matrik *n*x*n*) sehingga *n* masukan dan *n* keluaran sistem tidak berinteraksi. Jika diinginkan non-interaksi antara *n* masukan dan *n* keluaran, maka matrik alih lup tertutup harus merupakan matrik diagonal, atau dinyatakan dalam bentuk berikut

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & 0 & 0 \\ & G_{22}(s) & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

Non-interaksi dalam Sistem Multi-Input-Multi-Output (MIMO)

- Matrik umpan balik $\mathbf{H}(s)$ merupakan matrik satuan, $\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}$
- Persamaan $\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}_o(s)$

Maka, persamaan

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)]^{-1}\mathbf{G}_o(s)$$

Dimana,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_p(s)\mathbf{G}_c(s)$$

$$[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)]\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_o(s)$$

$$\mathbf{G}_o(s)\ [\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)] = \mathbf{G}(s)$$

Materi

Non-interaksi dalam Sistem Multi-Input-Multi-Output (MIMO)

•Jika kedua ruas persamaan terakhir dikalikan dengan $[\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)]^{-1}$, maka diperoleh

$$\mathbf{G}_o(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)]^{-1}$$

•Bentuk **G**(*s*) adalam matrik diagonal, maka [**I** - **G**(*s*)] juga merupakan matrik diagonal.

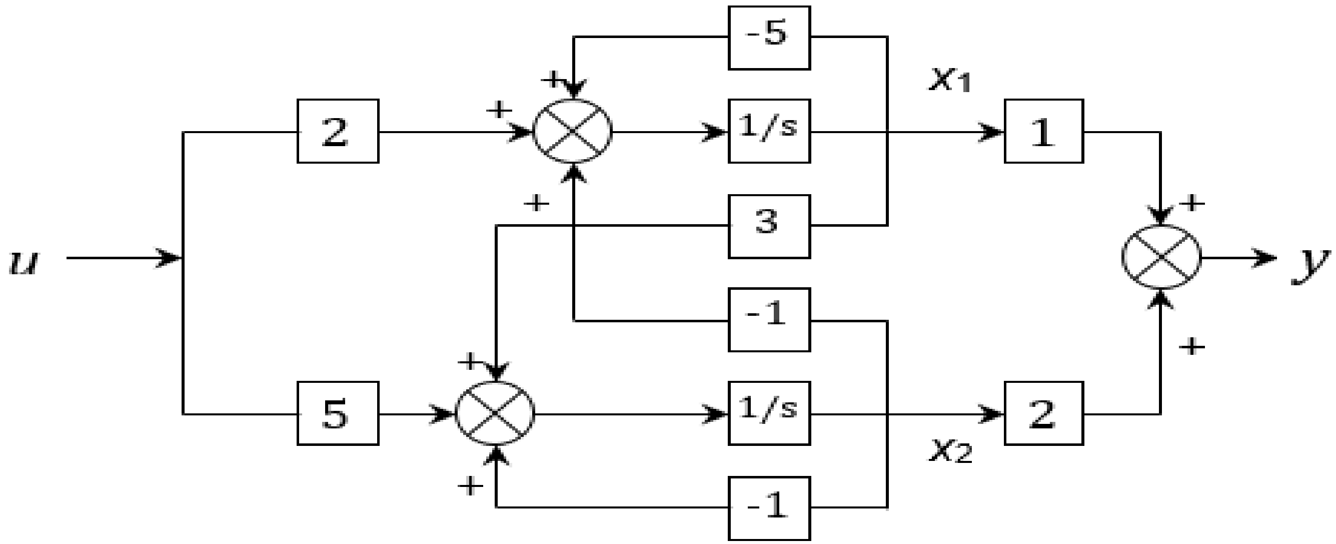
•Selanjutnya $\mathbf{G}_o(s)$, hasil kali dua buah matrik diagonal, juga merupakan matrik diagonal.

•Kondisi yang diharapkan agar tidak terjadi interaksi, harus dibuat agar $\mathbf{G}_o(s)$ merupakan matrik diagonal, dengan syarat bahwa matrik umpan balik **H**(*s*) merupakan matrik satuan.

Contoh Soal 1

Soal 1

Cari fungsi alih sistem yang ditunjukan pada gambar dibawah.



Contoh Soal 1

Penyelesaian

Dari gambar dibawah diperoleh persamaan keadaan dan keluaran sebagai berikut,

$$\dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 + 2u$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 + 5u$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

dalam bentuk matrik-vektor, dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 1

Penyelesaian

Selanjutnya fungsi alih sistem adalah,

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

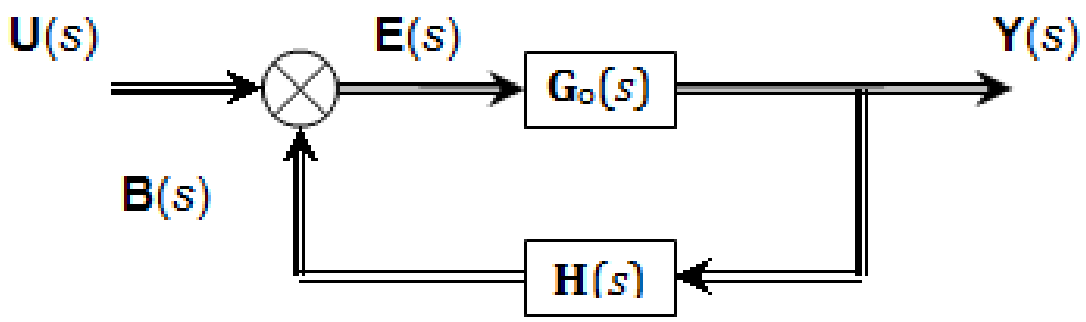
$$= \frac{12s+59}{(s+2)(s+4)}$$

Contoh Soal 2

Soal 2

Tinjau sistem seperti Gambar sistem loop tertutup di bawah ini. Tentukan matrik alih dari kompensator seri tersebut, sedemikian rupa sehingga matrik alih lup tertutup sistem tersebut adalah,

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$



Contoh Soal 2

Penyelesaian

Matrik alih lintasan umpan maju,

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{5s+1}{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

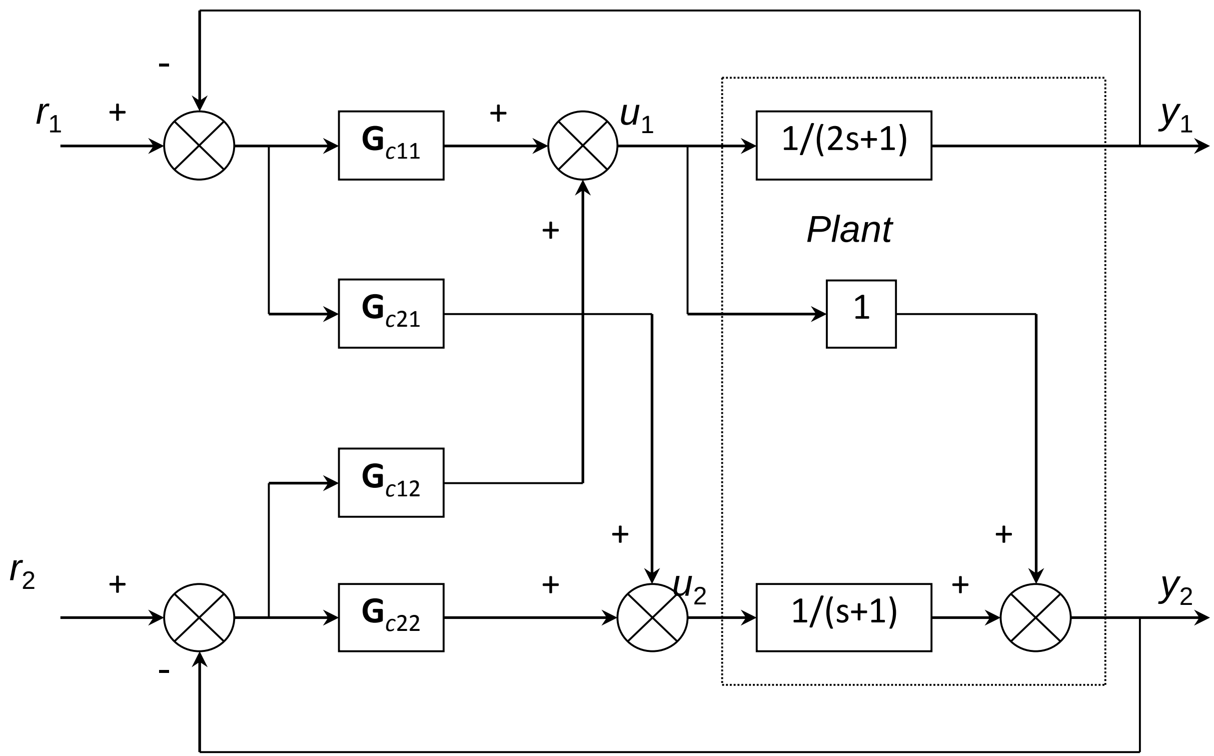
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix}$$

Contoh Soal

Penyelesaian



Gambar Blok diagram sistem multi-masukan-multi-keluaran (MIMO).

Contoh Soal

Penyelesaian

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s)-Y_1(s) \\ R_2(s)-Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s)-Y_1(s) \\ R_2(s)-Y_2(s) \end{bmatrix}$$

dengan demikian matrik alih kompensator adalah,

$$\mathbf{G}_c(s) = \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & 0 \\ -\frac{(s+1)(2s+1)}{s} & \frac{s+1}{5s} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal

Penyelesaian

Persamaan terakhir adalah merupakan matrik alih kompensator seri. Perhatikan bahwa $\mathbf{G}_{c11}(s)$ dan $\mathbf{G}_{c22}(s)$ adalah ***pengendali proporsional-plus-integral*** dan $\mathbf{G}_{c21}(s)$ adalah ***pengendali proporsional-plus-integral-plus-turunan***.

Dalam analisis ini belum ditinjau gangguan eksternal. Dalam pendekatan kali ini, pada umumnya, terjadi penghapusan pada pembilang dan penyebut.

Oleh karena itu beberapa *eigenvalue* dari $\mathbf{G}_p(s)\mathbf{G}_c(s)$ akan hilang. Ini berarti bahwa sekalipun pendekatan ini akan memberikan hasil yang diinginkan, yakni non-interaksi pada respon terhadap masukan-masukan acuan tanpa adanya gangguan eksternal, akan tetapi jika sistem diganggu oleh gaya eksternal, maka sistem menjadi tidak terkendali karena setiap gerakan yang ditimbulkan oleh *eigevalue* yang terhapus tidak dapat dikendalikan.

Ringkasan

1. Matriks alih merupakan matrik yang mempunyai fungsi sebagai transformator variable keadaan saat t dari t sebelumnya
2. Matriks alih mempunyai fungsi yang sama sebagai fungsi alih / fungsi transfer.

Latihan

Perhatikan sistem yang dinyatakan dalam persamaan keadaan berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan keluaran sistem dengan masukan fungsi step.

SEKIAN

&

TERIMAKASIH