RANK DAN TRACE MATRIKS

Definisi *Rank* Matriks

Rank dari suatu matriks berukuran $m \times n$ adalah **jumlah maksimum dari vektor baris (kolom) yang bebas linier (*independen linier*). *Rank* dari suatu matriks merupakan dimensi dari vektor baris (kolom) non-zero pada matriks tersebut**.

Pada matriks bujur sangkar A, jika vektor baris dan vektor kolom yang bebas linier mempunyai dimensi yang sama, maka dimensi matriks tersebut merupakan rank matriks.

Misalnya diketahui matriks berukuran $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vektor baris dari matriks A:

$$u_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

$$u_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n})$$

…,

$$u_m = (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn})$$

Vektor kolom dari matriks A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rank dari matriks A dinyatakan oleh *rank*(A) *atau* $r(A)$.

Notasi *rank* suatu matriks:

$\boxed{rank(A) \Leftrightarrow r(A)}$

Rank matriks dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu matriks itu singular atau nonsingular. Jika A matriks bujur sangkar dengan dimensi nxn, maka:

a. Matriks A adalah nonsingular apabila $rank(A) = n$
b. Matriks A adalah singular apabila $rank(A) < n$

Ada beberapa metode untuk menentukan *rank* dari suatu matriks yaitu minor matriks dan eliminasi Gauss (operasi baris elementer).

1. Metode Minor Matriks

Jika minor matriks A denganbaris$m$ determinannya tidak sama dengan nol dan jika minor matriks untuk baris $m+1$ deterimannya sama dengan nol, maka matriks A mempunyai rank sebesar $m$atau $rank(A) = m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika M adalah minor dan m adalah indeks baris dari matriks A:

$$M_{m\times j} \neq 0, \qquad M_{(m+1)\times j} = 0 \Longrightarrow rank\ (A) = m$$

Contoh:

1. Tentukan *rank* dari matriks berikut, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

   Solusi:

   $$\det A = M_{3\times 3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{vmatrix} = (30+30+30) - (30+30+30) = 0$$

   Determinan matriks A ukuran $3\chi3$ adalah o, ini menunjukkan bahwa $rank\ (A) \neq 3$ atau $rank\ (A) < 3$. Untuk itu, dilakukan perhitungan nilai minor-minor dari matriks A:

   1. $M_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (6) - (6) = 0$
   2. $M_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (3) - (3) = 0$
   3. $M_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (6) - (6) = 0$

4. $M_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = (10) - (10) = 0$
5. $M_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = (5) - (5) = 0$
6. $M_{2x2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = (10) - (10) = 0$
7. $M_{1x1} = |1| = 1$
8. $M_{1x1} = |5| =$

Karena $M_{1x1} \neq o,$ maka $rank(A) = 1$. Jadi *rank* matriks A adalah 1.

2. Tentukan *rank* dari matriks berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Solusi:

Matriks A ukuran $3\chi4$ tidak mempunyai determinan untuk menentukan $rank(A)$ dilakukan perhitungan nilai minor-minor dari matriks A:

1. $M_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} = (14 + 18 - 10) - (6 + 30 - 14) = 0$
2. $M_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & 8 \\ 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} = (48 - 40 + 42) - (90 - 56 + 16) = 0$
3. $M_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} = (-16 + 24 + 30) - (-18 + 40 + 16) = 0$
4. $M_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} = (48 - 24 - 42) - (54 - 56 - 16) = 0$
5. $M_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2) - (2) = -4$
6. $M_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = (6) - (2) = 4$

Karena $M_{2x2} \neq o,$ maka $rank(A) = 2$. Jadi $rank$ matriks A adalah 2.

3. Tentukan $rank$ dari matriks berikut, $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Solusi:

1. $M_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = (30 + 12 + 0) - (-16 + 0 - 10) = 68$
2. $M_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (0 + 40 - 18) - (0 + 15 - 8) = 15$

   Karena $M_{3x3} \neq o,$ maka $rank(A) = 3$. Jadi $rank$ matriks A adalah 3.

2. Metode Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss melalui transformasi baris elementer terhadap baris dan kolom matriks sehingga membentuk matriks *Hermit Canonical* yaitu:

a. Matriks yang setiap elemen di atas atau di bawah diagonal utama bernilai nol (0).
b. Elemen pada diagonal utama bernilai satu atau nol.

Hasil transformasi matriks tersebut melalui operasi baris elementer (OBE) membentuk matriks identitas (I) atau segitiga atas (U) dengan baris dan kolom sebesar m, maka matriks A mempunyai $rank$ sebesar m atau $rank(A) = m$.

Jika,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atau,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, $rank(A) = m$

Contoh

1. Tentukan $rank$ dari matriks berikut, $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$

   Solusi:

$$A=\begin{bmatrix}2&10\\1&5\\5&20\end{bmatrix}\overset{b_{31}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}5&20\\1&5\\2&10\end{bmatrix}\xrightarrow{b_{32}(-2)}A=\begin{bmatrix}2&10\\1&5\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{b_1(1/5)}$$

$$\begin{bmatrix}1&4\\1&5\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{b_{21}(-1)}\begin{bmatrix}1&4\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{b_{12}(-4)}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}I_2\\0\end{bmatrix}$$

Jadi $rank\ (A)=2$.

2. Tentukan $rank$ dari matriks berikut, $B=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&2&4\\2&1&3\end{bmatrix}$

   Solusi:

$$B=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&2&4\\2&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[b_{31}(-1)]{\substack{b_1(1/2)\\b_{21}(-3/2)}}\begin{bmatrix}1&1/2&1/2\\0&1/2&5/2\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{b_{12}(-1)}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1/2&5/2\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{b_2(2)}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&5\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{b_{13}(1)\\b_{23}(-5/2)}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1/2&5/2\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{b_3(1/2)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow I_3$$

Jad i$rank(B)=3$.

3. Tentukan $rank$ dari matriks berikut, $C=\begin{bmatrix}1&1&-1&3\\2&-2&6&8\\3&5&-7&8\end{bmatrix}$

   Solusi:

$$C=\begin{bmatrix}1&1&-1&3\\2&-2&6&8\\3&5&-7&8\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{b_{21}(-2)\\b_{31}(-3)}}\begin{bmatrix}1&1&-1&3\\0&-4&8&2\\0&2&-4&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{b_{32}\left(\frac{1}{2}\right)\\b_2\left(-\frac{1}{4}\right)}}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&3\\0&1&-2&-1/2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{b_{12}(-1)}\begin{bmatrix}1&0&1&7/2\\0&1&-2&-1/2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}I_2&\begin{matrix}1&7/2\\-2&-1/2\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\end{bmatrix}$$

Jadi $rank(C)=2$.

4. Tentukan $rank$ dari matriks berikut, $D=\begin{bmatrix}3&-2&4\\1&2&3\\-2&0&5\\4&3&2\end{bmatrix}$

   Solusi:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[b_{41}(-4)]{\substack{b_{21}(-3) \\ b_{31}(2)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -5 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2(-1/8)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/8 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{12}(-2) \\ b_{32}(-4) \\ b_{41}(5)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/4 \\ 0 & 1 & 5/8 \\ 0 & 0 & 17/2 \\ 0 & 0 & -31/8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{13}(-7/34) \\ b_{23}(-5/68) \\ b_{43}(31/68)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_3(2/17)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $rank\ (D) = 3$.

5. Tentukan $rank$ dari matriks berikut

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \end{bmatrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I_2 & & -4 & -28 & -37 & 13 \\ & & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $rank(E) = 2$.

3. Sifat *Rank* Matriks

Ada beberapa sifat $rank$ matriks yaitu:

a. Jika matriks A berukuran mxn, maka:
$rank(A) = rank\ (A^T)$

b. Jika A matriks ukuran $m \times n$, maka vektor baris matriks A adalah bebas linier jika dan hanya jika
$rank(A) = n$

c. Jika A matriks ukuran $m \times n$, maka vektor kolom matriks A adalah bebas linier jika dan hanya jika

$rank(A) = m$

4. Nullitas Matriks

Nullitas matriks adalah dimensi ruang nol (*null space*) pada suatu matriks. Nullitas matriks dinyat akan oleh $null(A)$.

Jika matriks A berukuran $mxn,$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka: $rank\ (A) + null(A) = n$

1. $Null\ A$ adalah jumlah variabel *nonpivot* (baris zero)
2. $Rank\ A$ adalah jumlah variabel *pivot* (baris non zero)

Jumlah dari variabel $nonpivot$ dan $pivot$pada suatu matriks adalah $n\ (jumlah\ baris).$

Contoh:

1. Tentukan $rank$ dan $null$ dari matriks berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:
$rank(A) = 3$
$null(A) = 1$

2. Tentukan $rank$ dan $null$ dari matriks berikut,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:
$rank(B) = 2$
$null(B) = 1$

3. Tentukan $rank$ dan $null$ dari matriks berikut,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/8 \\ 0 & 0 & 17/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$rank(C) = 3$

$null(C) = 1$

4. Tentukan $rank$ dan $null$ dari matriks berikut,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:

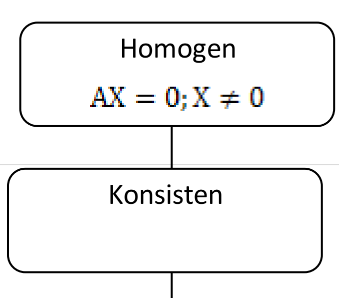
$rank(C) = 2$

$null(C) = 2$

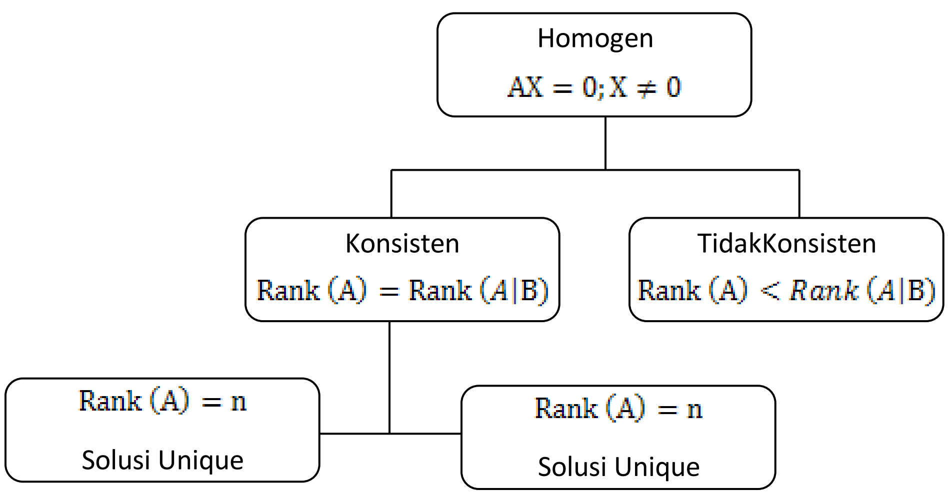
5. Aplikasi Konsep *Rank* dan Nullitas Matriks

Konsep $rank$ dan nullitas matriks dipergunakan untuk mengetahui kemungkinan pemecahan (solusi) dalam sistem persamaan linier simultan homogen maupun nonhomogen.

1. Mengetahui konsistensi sitem persamaan linier simultan.
   $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ adalah konsisten jika dan hanya jika
   $rank(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = rank(\boldsymbol{A})$.
2. Mengetahui jumlah parameter dalam pemecahan atau solusi sistem persamaan linier simultan. Jika pada sistem persamaan linier simultan $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ dengan jumlah persamaan m dan parameter yang tidak diketahui n adalah konsisten dan $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, maka solusi pemecahan persamaan mempunyai $(n - r)$ parameter.
3. *Flowchart* pemecahan sistem persamaan linier homogen dan non homogen masing-masing ditunjukkan pada Gambar 1 dan 2.



Gambar 1 *Flowchart* penyelesaian persamaan linier homogen



Gambar 2 *Flowchart* penyelesaian persamaan linier nonhomogen

Jika matriks A berukuran $mxn,$ maka hanya ada satu solusi (*unique*) untuk $AX = B$ jika dan hanya jika $rank(A) = n$.

Contoh:

1. Evaluasi kemungkinan pemecahan dari matriks sistem persamaan linier berikut:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Solusi: $rank\ A \leq 3$dan$null \geq (4-3) = 1$

Jadi pemecahan persamaan tidak *unique*.

2. Evaluasi kemungkinan pemecahan dari matriks sistem persamaan linier berikut:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Solusi: $rank\ A = 2$dan$null\ A = (3-2) = 1,$

Jadi pemecahan persamaan tidak $unique$.

3. Evaluasi kemungkinan pemecahan dari matriks sistem persamaan linier berikut:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Solusi: $rank\ A = 3$dan$null\ A = (3-3) = 0,$

Jadi pemecahan persamaan $unique$.

4. Evaluasi kemungkinan pemecahan dari matriks sistem persamaan linier berikut:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Solusi: $rank\ A = 3$dan$null\ A = (4-3) = 1,$

Jadi pemecahan persamaan $unique$.

5. Evaluasi kemungkinan pemecahan dari matriks sistem persamaan linier berikut:

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7$

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 19$

Solusi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 19 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{OBE}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank\ A = 2$dan$null\ A = (3-2) = 1,$

Sistem persamaan tersebut adalah konsisten dan mempunyai solusi pemecahan infinitive. Di mana $rank(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = rank\ (\boldsymbol{A}) = 2,$ maka jumlah parameter solusi pemecahan persamaan tersebuta dalah $3 - 2 = 1$.

Trace Matriks

Trace matriks adalah jumlah elemen diagonal utama pada matriks bujur sangkar (kuadrat). Jika matriks A adalah bujur sangkar (kuadrat) ukuran $mxn,$ maka $trace\ A$ dinyatakan oleh $tr\ (A)$.

Jika diketahui matriks A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka $trace$ dari matriks A:

$$tr\ (A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{j=1}^{m} a_{jj}$$

Jadi $trace$ suatu matriks bujursangkar adalah penjumlahan elemen-elemen pada diagonal utama matriks tersebut.

Contoh:

1. Tentukan $trace$ dari matriks berikut,

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   Solusi:

   $$tr\ (A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 1 + 4 = 5$$

2. Tentukan $trace$ dari matriks berikut,

   $$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   Solusi:

$$tr\ (B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 2 + 2 + 2 = 6$$

3. Tentukan $trace$ dari matriks berikut,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$tr\ (C) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 1 + 5 - 2 = 4$$

Tentukan $trace$ dari matriks berikut,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$tr\ (D) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

Sifat *Trace* Matriks

Trace matriks mempunyai sifat penting dalam manipulasi suatu matriks bujursangkar yaitu:

1. $tr\ (kA) = k[tr(A)], \qquad k = skalar$
2. $tr\ (A \pm B) = tr\ (A) \pm tr\ (B)$
3. $tr(AB) = tr(BA)$
4. $tr\ (B^{-1}AB) = tr(A)$
5. $tr\ (AA^T) = \sum_{i}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij})^2$

Soal untuk Latihan

1. Tentukan $rank$ matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan metode minor.
2. Tentukan $rank$ matriks C dan D menggunakan eliminasi Gauss.

   $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. Tentukan nullitas dari matriks C dan D pada soal 2.
4. Evaluasi kemungkinan pemecahan dari matriks sistem persamaan linier berikut.

   $AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

5. Tentukan $trace$ dari matriks $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.