Topik
3

3. TEORI PELUANG

Tujuan Instruksional Umum:

- Mahasiswa mampu memahami istilah dan konsep-konsep dalam teori peluang dan statistika.

Tujuan Instruksional Khusus:

- Mahasiswa mampu menentukan dan menuliskan ruang sampel, ruang kejadian dan peubah acak jika diberikan suatu percobaan acak.
- Mahasiswa mampu menentukan dan menuliskan fungsi peluang dan fungsi distribusi dari peubah acak diskret dan kontinu.
- Mahasiswa mampu menghitung ekspektasi (mean, variansi, raw moment dan central moment) dari peubah acak diskret dan kontinu, serta menghitung ekspektasi dari fungsi peubah acak dengan menggunakan sifat-sifat ekspektasi.
- Mahasiswa mampu memberikan contoh-contoh masalah nyata yang dapat dimodelkan menggunakan proses stokastik.
- Mahasiswa mampu menggunakan simulasi Monte Carlo (dengan bantuan software matlab) untuk memahami sifat-sifat yang dipelajari dalam teori peluang dan statistika.

Pendahuluan

Dalam suatu model realistik yang berkenaan dengan fenomena alam, ada satu hal yang perlu dipertimbangkan yaitu kemungkinan terjadinya “ke-acakan”. Hal ini berarti bahwa besaran-besaran yang terlibat di dalam model sering tidak dapat diprediksi sebelumnya, tetapi justru akan menunjukkan suatu variasi nyata yang harus dimasukkan ke dalam model. Model seperti ini dikenal dengan nama model probabilitas *(probability model)*. Untuk memahami model-model tsb dibutuhkan pemahaman yang baik tentang teori peluang dan statistika. Tentu saja dibutuhkan pula pemahaman bidang-bidang lainnya, seperti komputasi dan bidang-bidang yang spesifik sesuai dengan masalah yang akan kita modelkan.

Ruang sampel (sample space), kejadian (event) dan peluang (probability)

Misalkan dilakukan suatu percobaan dengan cara mengundi sebuah dadu.
Hasil percobaan yang mungkin diperoleh yaitu mata dadu bernilai 1, 2, 3, 4, 5 atau 6.

Percobaan acak (random experiment) didefinisikan sebagai percobaan yang hasilnya (outcome) tidak dapat diketahui dengan pasti (uncertain) sebelum percobaan tsb dilakukan.
Himpunan yang beranggotakan semua hasil percobaan yang mungkin diperoleh disebut **ruang sampel (*sample space*).**
Anggota dari ruang sampel disebut **titik sampel (*sample point*).**

Ruang sampel untuk percobaan tadi adalah $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

-Misalkan dadu tsb diundi sebanyak 10 kali, dan diperoleh hasil percobaan sbb: 2;2;2;1;1;4;5;1;4;1.
Maka

Nilai mata dadu	1	2	3	4	5	6
Frekuensi relatif	4/10	3/10	0/10	2/10	1/10	0/10

-Misalkan percobaan tsb diulang sebanyak 100 kali, dan diperoleh hasil percobaan sbb:

Nilai mata dadu	1	2	3	4	5	6
Frekuensi relatif	0.19	0.15	0.12	0.13	0.22	0.19

-Misalkan percobaan tsb diulang sebanyak 1000 kali, kemudian setelah diamati diperoleh hasil percobaan sbb:

Nilai mata dadu	1	2	3	4	5	6
Frekuensi relatif	0.149	0.151	0.179	0.165	0.171	0.185

-Misalkan percobaan tsb diulang sebanyak 100000 kali, kemudian setelah diamati diperoleh hasil percobaan sbb:

Nilai mata dadu	1	2	3	4	5	6
Frekuensi relatif	0.1669	0.1672	0.1655	0.1671	0.1664	0.1668

Jika percobaan tsb diulang sebanyak N kali, dengan N yang cukup besar ($N \to \infty$) maka nilai frekuensi relatif munculnya mata dadu bernilai-i akan mendekati 1/6 (0.1667).
Sehingga dapat dikatakan **peluang** munculnya mata dadu bernilai ω_i adalah p_i di mana $p_i = \lim_{N\to\infty} f_i$ dan f_i menyatakan frekuensi relatif munculnya mata dadu bernilai ω_i.

Perhatikan bahwa peluang suatu kejadian memiliki sifat sebagai berikut:

1) $0 \leq p_i \leq 1$
2) $\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1$

Himpunan bagian (*subset*) dari ruang sampel disebut **kejadian (*event*).**
Sebagai contoh, misalkan kita tertarik untuk mengamati apakah nilai mata dadu yang muncul berupa bilangan ganjil. Untuk kasus ini kita definisikan kejadian (event): $A = \{1,3,5\}$. Jelas $A \subseteq \Omega$.

Komplemen dari kejadian A adalah kejadian di mana nilai mata dadu yang muncul berupa bilangan genap. Menggunakan notasi himpunan dapat dituliskan $A^C = \{2,4,6\}$. Jelas pula bahwa $A^C \subseteq \Omega$.

Jika A merupakan kejadian (*event*) maka komplemen dari A, yaitu $A^C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$, juga merupakan kejadian (*event*).

Perhatikan kembali contoh sebelumnya. Kita lihat bahwa peluang munculnya nilai mata dadu berupa bilangan ganjil adalah:

$$P(A)=\sum_{\omega_i \epsilon A} p_i = P(\omega_i \epsilon \{1,3,5\}) = 3/6$$

dan peluang munculnya nilai mata dadu berupa bilangan genap:

$$P(A^C)=\sum_{\omega_i \notin A} p_i = 1 - P(A) = 1 - 3/6 = 3/6.$$

Dapat ditunjukkan bahwa: $P(A^C) = 1 - P(A)$

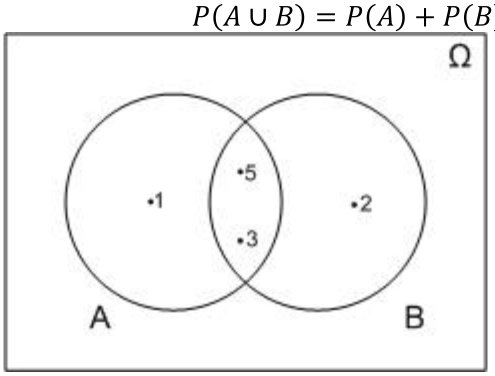
Perhatikan bahwa $\Omega \subseteq \Omega$. Jadi Ω merupakan kejadian (*event*).
Perhatikan kembali contoh sebelumnya. Jika $A = \Omega$ maka $P(A) = P(\omega_i \epsilon \{1,2,3,4,5,6\}) = 1$ dan $A^C = \emptyset$. Maka dapat disimpulkan bahwa $\emptyset$ merupakan kejadian dan $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Sekarang perhatikan dua kejadian berikut:
Kejadian nilai mata dadu berupa bilangan ganjil A={1,3,5}.
Kejadian nilai mata dadu berupa bilangan prima B={2,3,5}.

Kejadian $A \cup B$ dikatakan terjadi jika kejadian A atau kejadian B terjadi
Kejadian $A \cap B$ dikatakan terjadi jika kejadian A dan kejadian B terjadi

Maka $A \cap B = \{3,5\} \subseteq \Omega$ dan $P(A \cap B) = P(\omega_i \epsilon \{3,5\}) = 2/6$
$A \cup B = \{1,2,3,5\} \subseteq \Omega$ dan $P(A \cup B) = P(\omega_i \epsilon \{1,2,3,5\}) = 4/6$
Dengan menggunakan Diagram Venn mudah dilihat relasi sebagai berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Sekarang kita lihat dua kejadian berikut:
Kejadian nilai mata dadu berupa bilangan ganjil A={1,3,5}.
Kejadian nilai mata dadu berupa bilangan genap B={2,4,6}.
Maka $A \cap B = \emptyset$ dan $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} \subseteq \Omega$
dan $P(A \cap B) = 0$; $P(A)=3/6$; $P(B) = 3/6$ dan $P(A \cup B) = P(\omega_i \epsilon \{1,2,3,4,5\}) = 6/6$.
Pada contoh ini, kejadian A dan B disebut kejadian yang saling lepas.

Kejadian A dan B dikatakan **saling lepas (disjoint)** jika $A \cap B = \emptyset$.
Jika A dan B merupakan kejadian yang saling lepas, maka berlaku relasi berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dari uraian di atas, dapat didaftarkan beberapa sifat-sifat berikut:
Misalkan A dan B merupakan dua buah kejadian. Maka:

1) $A^C, A \cup B, A \cap B$ merupakan kejadian.
2) $0 \leq P(A) \leq 1$
3) $P(A^C) = 1 - P(A)$
4) $P(\emptyset)$=0 dan P(Ω)=1
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) Jika A dan B merupakan dua kejadian yang saling lepas, yaitu $A \cap B = \emptyset$, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sifat-sifat tersebut dapat diperumum untuk bilangan bulat positif sembarang n:

1) Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ merupakan kejadian maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ juga merupakan kejadian.
2) Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ dan $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j;\ i, j = 1,2, \dots n$ (*mutually exclusive*) maka
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Peluang bersyarat (*Conditional probability*)

Misalkan dalam percobaan pelemparan dua mata dadu, seorang anak diminta melempar dua buah dadu dengan mata tertutup. Teman anak tsb kemudian bertanya berapakah peluang diperoleh jumlah mata dadu sama dengan 6, tetapi teman anak tsb sudah melihat dan mengatakan bahwa mata dadu pertama bernilai sama dengan 4. Peluang yang dimaksud disebut peluang bersyarat.

Misalkan A dan B masing-masing menyatakan kejadian jumlah kedua mata dadu adalah 6 dan mata dadu yang pertama bernilai 4. Peluang kejadian A setelah terjadi kejadian B disebut **peluang bersyarat**. Peluang ini dinotasikan dengan $\boldsymbol{P(A|B)}$. Suatu formula umum untuk $P(A|B)$ diberikan dengan pertimbangan logis sebagai berikut. Karena B telah terjadi, maka B haruslah merupakan ruang sampel yang baru sehingga peluang kejadian $A \cap B$ terjadi akan sama dengan peluang $A \cap B$ relatif terhadap peluang B. Jadi peluang bersyarat $P(A|B)$ dapat dihitung dengan cara berikut:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Contoh:
Sebuah dadu diundi. Jika $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $P(A \cap B)$=1/6 dan $P(B)$=3/6.
Maka $P(A|B) = \frac{1/6}{3/6}$ =1/3.

Dua Kejadian yang saling bebas (*independent*)

Seringkali terjadinya kejadian A tidak dipengaruhi oleh terjadinya kejadian B, dan sebaliknya. Sebagai contoh, jika kita mengundi 2 mata uang secara bersamaan. Munculnya gambar pada mata uang pertama tidak dipengaruhi oleh munculnya angka pada mata uang yang kedua. Kedua kejadian tsb dikatakan **saling bebas (*independent*)**.

Jika kejadian A dan B saling bebas maka $P(A|B) = P(A)$. Akibatnya jika kejadian A dan B saling bebas maka $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$**.**

Misalkan terdapat 3 kejadian yaitu $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Barisan kejadian tsb dikatakan saling bebas (**mutually independent**) jika dan hanya jika

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P\left(A_j\right)$, $i \neq j$; i,j=1,2,…,n.

Peubah Acak (*Random variable*)

Sering terjadi bahwa di dalam melakukan suatu percobaan, kita lebih tertarik dengan beberapa fungsi dari hasil percobaan itu dibandingkan dengan hasil dari percobaan itu sendiri. Misalnya dalam percobaan melempar dua dadu yang seimbang, kita tertarik untuk mengetahui bahwa jumlah dua mata dadu yang muncul adalah 7 dan tidak tertarik dengan hasil aktualnya seperti (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) atau (6,1). Kuantitas yang ingin diketahui ini, yaitu suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel, dikenal dengan peubah **acak**. Karena nilai dari peubah acak ditentukan oleh hasil dari suatu percobaan, maka konsep peluang akan muncul untuk nilai-nilai yang mungkin untuk variabel acak tersebut.

Contoh 1:
Sebuah mata uang diundi. Ruang sampel dari percobaan tsb: $\Omega = \{H, T\}$.
Definisikan fungsi real yang memetakan ruang sampel tsb dengan himpunan bilangan real $X: \Omega \to \Re$
X disebut **peubah acak**, yaitu fungsi yang mengaitkan setiap anggota ruang sampel ($\omega \in \Omega$) dengan tepat satu bilangan real $X(\omega) = x$.
Untuk contoh tsb, definisikan peubah acak X yang memetakan $H \longmapsto 0$ dan $T \longmapsto 1$.
Misalkan $\mathcal{A}$ adalah ruang (*range*) dari X. Maka $\mathcal{A} = \{0,1\} \subseteq \Re$.
Contoh 2:
3 mata uang diundi secara bersamaan. Kita ingin mengamati berapa banyak muncul muka mata uang berupa 'head'. Ruang sampel dari percobaan tsb $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, THT, TTH, HTT, TTT\}$
Definisikan peubah acak X menggunakan fungsi berikut:

$$
\begin{array}{llll}
X: & TTT & \longmapsto & 0 \\
 & THT & \longmapsto & 1 \\
 & HTT & \longmapsto & 1 \\
 & HTT & \longmapsto & 1 \\
 & HTH & \longmapsto & 2 \\
 & THH & \longmapsto & 2 \\
 & HHT & \longmapsto & 2 \\
 & HHH & \longmapsto & 3
\end{array}
$$

Misalkan $\mathcal{A}$ adalah ruang dari X. Maka $\mathcal{A} = \{0,1,2,3\} \subseteq \Re$.
Peluang dari anggota $\mathcal{A}$ adalah sbb:

$P(X = 0) = 1/8$; $P(X = 1) = 3/8$; $P(X = 2) = 3/8$ dan $P(X = 3) = 1/8$;

Peubah acak diskret dan peubah acak kontinu

- Jika ruang dari X berupa himpunan berhingga (*finite*) atau himpunan tak berhingga (*infinite*) dan terhitung (*countable*) maka X disebut **peubah acak diskret** (*discrete random variable*).
- Jika ruang dari X berupa himpunan tak hingga atau berhingga tetapi tak terhitung (uncountable) maka X disebut **peubah acak kontinu** (*continuous random variable*).

Fungsi peluang dan fungsi distribusi

Misalkan X merupakan peubah acak diskret dan misalkan $\mathcal{A}$ adalah ruang dari X.
Fungsi $p(x)$ disebut **fungsi peluang / fungsi massa peluang (probability mass function)** jika untuk setiap $x \in \mathcal{A}$ berlaku:

1) $p(x) \leq 1$
2) $\sum_{x \in \mathcal{A}} p(x)=1$
3) $P(X = x) = p(x)$

Fungsi massa peluang untuk contoh 1 diatas:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x = 0,1 \\ 0, untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$$

Fungsi massa peluang untuk contoh 2 di atas:

$$p(x) = \begin{cases} 1/8 & , x = 0,3 \\ 3/8 & , x = 1,2 \\ 0 & , untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Contoh 3:
Definisikan peubah acak X yang menyatakan jumlah atom yang meluruh per unit waktu pada saat peluruhan suatu bahan radioaktif. Ruang dari peubah acak X adalah $\mathcal{A} = \{0,1,2,3, \dots\}$.
X adalah peubah acak diskret. Maka fungsi:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda),\ n = 0,1,2, \dots \text{ dan } \lambda > 0$$

mendefinisikan fungsi massa peluang untuk peubah acak X.
Peubah acak X disebut berdistribusi Poisson dengan parameter λ.

Dapat ditunjukkan bahwa $p(x)$ untuk ketiga contoh tsb memenuhi ketiga sifat fungsi massa peluang.

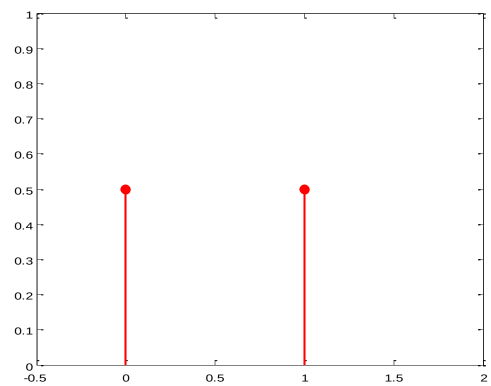
Misalkan X peubah acak diskret yang memiliki fungsi massa peluang $p(x)$.
Fungsi distribusi / fungsi distribusi kumulatif (distribution function / cumulative distribution function) untuk peubah acak diskret X, didefinisikan sbb:

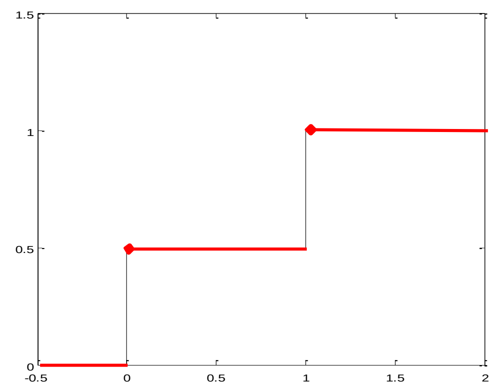
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} p(t)$$

Fungsi distribusi untuk contoh 1:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \ \ge 1 \end{cases}$$

Berikut gambar fungsi massa peluang (kiri) dan fungsi distribusi (kanan) untuk contoh 1.



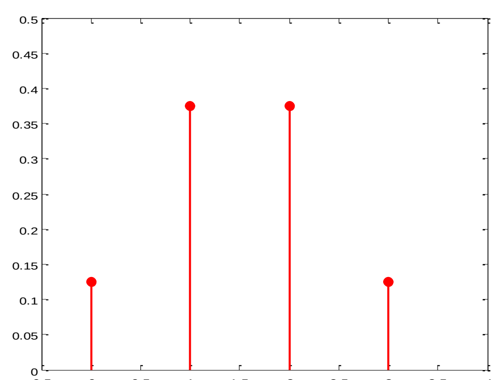


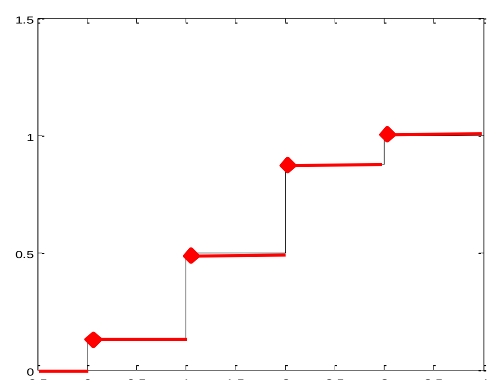
Fungsi distribusi untuk contoh 2:

$$F(x) = P(X \le x)$$

0	$, x < 0$
1/8	, 0≤ $x < 1$
4/8	, 1≤ $x < 2$
7/8	, 2≤ $x < 3$
1	, x ≥ 3

Berikut gambar fungsi massa peluang (kiri) dan fungsi distribusi (kanan) untuk contoh 2.





Fungsi distribusi dari peubah acak diskret X memenuhi sifat-sifat berikut:

1) $0 \ \le F(x) \le 1$

2) $F(x)$ merupakan fungsi tidak turun (*non-decreasing function*)
3) $F(x)$ merupakan fungsi tangga dan kontinu kanan.
   Besar loncatan fungsi distribusi di $x \in$ ruang dari X akan sama dengan $p(x)$
4) $F(x)$=0 untuk setiap x yang nilainya lebih kecil dari min($\mathcal{A}$) dan
   $F(x)$=1 untuk setiap x yang nilainya lebih besar dari max($\mathcal{A}$)

Misalkan X merupakan peubah acak kontinu dan misalkan $\mathcal{A}$ ruang X.
Fungsi $f(x)$ disebut **fungsi peluang / fungsi padat peluang (*probability density function*)** jika untuk setiap $x \in \mathcal{A}$ berlaku:

1) $f(x) \geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)$=1
3) $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Misalkan X peubah acak kontinu yang memiliki fungsi padat peluang $f(x)$.
Fungsi distribusi / fungsi distribusi kumulatif (distribution function / cumulative distribution function) untuk peubah acak kontinu X didefinisikan sbb:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ , -\infty < x < \infty$$

Hubungan antara fungsi distribusi dan fungsi padat peluang diberikan relasi berikut:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Contoh 4:
Peubah acak kontinu X disebut berdistribusi uniform pada interval (a, b), ditulis $X \sim U(a, b)$, jika memiliki fungsi padat peluang:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},\ a < x < b.$$

Fungsi distribusi dari X diberikan oleh:
Untuk $x < a$: $F(x) = 0$
Untuk $a \leq x < b$: $F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$

Fungsi distribusi dari peubah kontinu X memiliki sifat:

1) $0 \leq F(x) < 1$
2) $F(x)$ merupakan fungsi tidak turun (non-decreasing function)
3) $F(x)$ merupakan fungsi kontinu
4) $F(-\infty) = 0$ dan $F(\infty) = 1$

Ekspektasi

1. Misalkan X adalah peubah acak diskret dengan fungsi massa peluang $p(x)$.
   Ekspektasi dari (X) , ditulis $E(u(X))$, didefinisikan
   $$E(u(X)) = \sum_{x \in \mathcal{A}} u(x)p(x)$$

2. Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi padat peluang $f(x)$.
   Ekspektasi dari $u(X)$, ditulis $E(u(X))$, didefinisikan

$$E\big(u(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx$$

Catatan: nilai ekspektasi tidak selalu ada (exist)

Beberapa ekspektasi khusus:

1. Jika $u(X) = X^k$, maka $E\big(u(X)\big)$ disebut *raw moment* ke-k dari peubah acak X,
2. Jika $u(X) = (X - E(X))^k$, maka $E\big(u(X)\big)$ disebut *central moment* ke-k dari peubah acak X
3. Mean atau ekspektasi dari peubah acak X, ditulis $E(X)$ atau μ, didefinisikan:
   $\mu = E(X) = \sum_{x \in \mathcal{A}} x\, p(x)$, jika X peubah acak diskret
   $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$, jika X peubah acak kontinu
4. Variansi (*variance*) dari peubah acak X, ditulis $var(X)$ atau $E[(X - \mu)^2)]$ atau σ^2, didefinisikan:
   $Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2)] = \sum_{x \in \mathcal{A}} (x - \mu)^2\, p(x)$, jika X peubah acak diskret
   $Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2\, f(x) dx$, jika X peubah acak kontinu

   Dapat ditunjukkan bahwa $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
   Deviasi standar atau simpangan baku (*standard deviation*) dari peubah acak X didefinisikan sebagai akar kuadrat dari variansi.

$$std(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Contoh 1:
Misalkan peubah acak X memiliki fungsi massa peluang $p(x) = p^x (1-p)^{1-x},\ x = 0{,}1.$
Maka:

- Mean atau ekspektasi dari X atau *raw moment* ke-1 dari X:
  $\mu = E(X) = 0(1-p) + 1p = p$
- Ekspektasi dari X^2 atau *raw moment* ke-2 dari X:

$$E(X^2) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

- Variansi dari X:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Contoh 2:
Peubah acak kontinu X disebut berdistribusi uniform pada interval (a, b), ditulis $X \sim U(a, b)$, jika memiliki fungsi padat peluang:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},\ a < x < b.$$

Mean dari peubah acak X:

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Sifat-sifat ekspektasi:

1. $E(a) = a, \ \ a \in \Re$
2. $E(aX) = aE(X), \ a \in \Re$
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. Dalam bentuk yang lebih umum, sifat 1 dan 2 dapat ditulis sbb:
$$E[aU(X) + bW(X)] = aE(U(X)) + bE(W(X)), \ a, b \in \Re$$
5. Jika peubah acak X dan Y saling bebas, maka
$$E\big(U(X) + W(Y)\big) = E\big(U(X)\big) + E(W(Y))$$
6. $Var(a) = 0$, dimana a: konstanta
7. $Var(aX) = a^2 Var(X)$, dimana a: konstanta.

Perhatikan contoh 1 di atas.
Menggunakan sifat-sifat yang diberikan maka dapat diperoleh bahwa:
$$E(2X + 3) = 2 + 3E(X) = 2 + 3p$$

Barisan peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ disebut **saling bebas dan memiliki distribusi yang identik (*independent and identically distributed / iid*)** jika barisan peubah acak tsb saling bebas (*mutually independent*) dan semua peubah acak tsb memiliki distribusi yang sama (identik).

Distribusi Bernoulli dan binomial

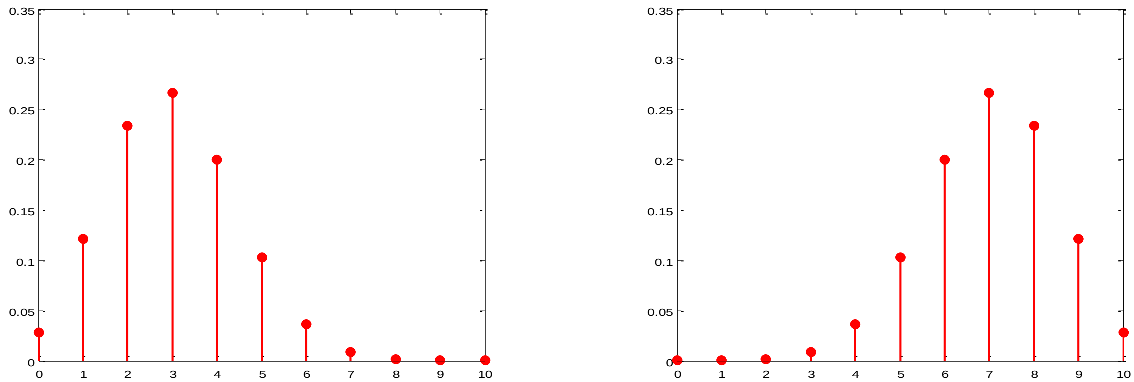
Salah satu distribusi diskret yang banyak digunakan dalam bidang matematika keuangan, ialah distribusi binomial.

Peubah acak diskret X yang memiliki nilai 1 dengan peluang p , $0 \le p \le 1$, dan nilai 0 dengan peluang $(1 - p)$ disebut berdistribusi Bernoulli dengan parameter p. Peubah acak tsb memiliki fungsi massa peluang:
$$p(x) = p^x (1 - p)^{1-x}, x = 0,1.$$

Dapat ditunjukkan bahwa peubah acak X memiliki mean dan variansi:
$$E(X) = p$$
$$Var(X) = p(1 - p)$$

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan memiliki distribusi yang identik (iid) yaitu berdistribusi Bernoulli dengan parameter p.
Definisikan peubah acak $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Peubah acak Y disebut berdistribusi binomial dengan parameter n dan p, ditulis $Y \sim b(n, p)$, dan memiliki fungsi massa peluang:
$$p(y) = \binom{n}{y} p^y (1 - p)^{n-y}, y = 0,1, \dots, n$$

Jika pada distribusi Bernoulli p ditafsirkan sebagai peluang sukses, maka fungsi massa peluang dari peubah acak Y pada distribusi binomial dengan parameter n dan p, ditulis $p(y)$, dapat ditafsirkan sebagai peluang diperoleh sukses sebanyak y kali.



Fungsi massa peluang dari peubah acak yang berdistribusi binomial dengan parameter n=10 ; p=0.3 (kiri) dan p=0.7 (kanan)

Dapat ditunjukkan bahwa peubah acak Y memiliki mean dan variansi:

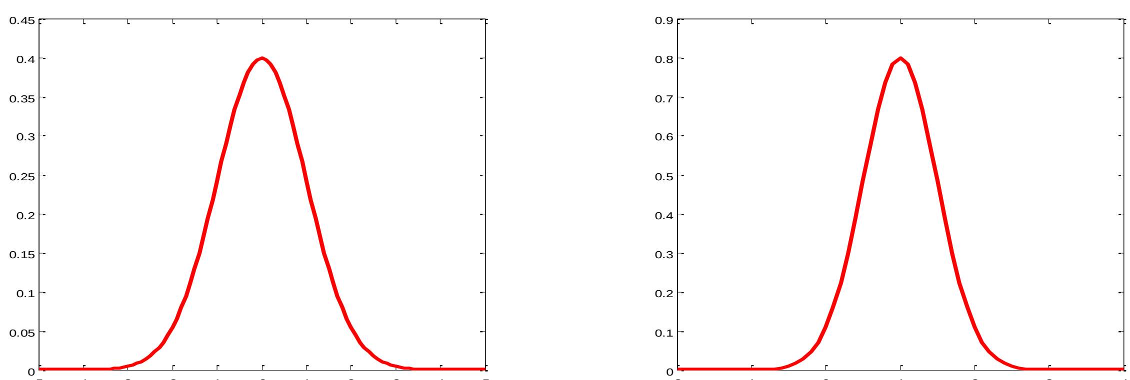
$$E(Y) = np$$
$$Var(Y) = np(1-p)$$

Distribusi Normal

Salah satu distribusi kontinu yang banyak digunakan diberbagai bidang ilmu, termasuk dalam bidang matematika keuangan, ialah distribusi normal. Peubah acak kontinu X disebut berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ, ditulis $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, jika peubah acak tersebut memiliki fungsi padat peluang:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right), -\infty < x < \infty \, , -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0.$$

Jika $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$ maka dikatakan peubah acak kontinu X berdistribusi normal baku (*standard normal*).



Fungsi padat peluang dari peubah acak yang berdistribusi normal baku (kiri) dan $\mathrm{N}(1, 0.5^2)$

Dengan menggunakan definisi ekspektasi, dapat ditunjukkan bahwa:

$$E(X) = \mu$$
$$Var(X) = \sigma^2$$

Beberapa sifat dari distribusi normal:

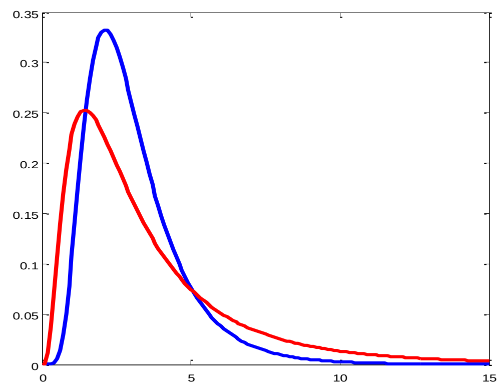
1. Jika $X \sim$ N(μ, σ^2) maka $(X - \mu)/\sigma \sim$ N$(0,1)$
2. Jika $X \sim$ N$(0,1)$ maka $(\mu + \sigma X) \sim N(\mu, \sigma^2)$
3. Jika peubah acak X dan Y saling bebas, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ dan $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ maka
$$(X + Y) \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Distribusi Lognormal

Distribusi lognormal banyak dipakai dalam bidang matematika keuangan, khususnya ketika membahas model harga aset, misalnya harga saham (*stock*), komoditi, dsb.

Peubah acak kontinu X disebut berdistribusi lognormal dengan parameter μ dan σ, ditulis $X \sim$ lognormal(μ, σ^2), jika peubah acak tersebut memiliki fungsi padat peluang:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right), 0 < x < \infty\,, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0.$$



Fungsi padat peluang dari peubah acak yang berdistribusi lognormal dengan parameter μ = 1 ; σ = 0.5 (merah) dan σ = 0.8 (biru)

Dengan menggunakan definisi ekspektasi, dapat ditunjukkan bahwa:

$$E(X) = \exp\,(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$$
$$E(X^2) = \exp\,(2\mu + 2\sigma^2)$$

Kaitan antara distribusi normal dan distribusi lognormal diberikan oleh pernyataan berikut:

1. Jika peubah acak $X \sim$lognormal(μ, σ^2), maka peubah acak $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
2. Jika peubah acak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka peubah acak $\exp\,(X) \sim$ lognormal(μ, σ^2).

Proses Stokastik (Stochastic Process)

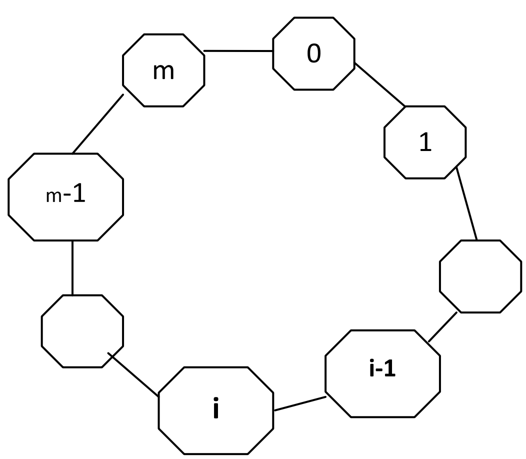
Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ didefinisikan sebagai koleksi dari peubah acak. Untuk setiap $t \in T$, $X(t)$ merupakan peubah acak. Indeks t seringkali diinterpretasikan sebagai waktu, sehingga $X(t)$ dapat diinterpretasikan sebagai state dari proses pada saat t.

Jadi peubah acak yang nilainya berubah terhadap waktu dengan pola perubahan yang tidak pasti (uncertain) disebut mengikuti proses stokastik.
Sebagai contoh:

1. $X(t)$ menyatakan jumlah pelanggan yang masuk ke supermarket pada saat t
2. $S(t)$ menyatakan harga saham pada saat t

Himpunan T disebut himpunan indeks dari proses.
Jika T berupa himpunan yang *terhitung* (*countable*), maka proses stokastik tsb disebut **proses stokastik dengan waktu diskret** (**discrete-time process**).
Contoh:

1. Sebuah partikel bergerak dari satu node ke node yang lain yang membentuk lintasan berupa sebuah lingkaran yang diberi label 0,1,2,…,m. Partikel akan bergerak mengikuti arah jarum jam atau berlawanan arah jarum jam sampai seluruh node sudah dikunjungi dengan peluang:
$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = P(X_{n-1} = i + 1 | X_n = i) = 1/2$$
di mana X_n menyatakan posisi partikel sesudah n langkah.



Maka stokastik proses yang menyatakan posisi partikel tsb dapat dinyatakan: $\{X_n, n = 0,1,2, \dots\}$

2. Jika T berupa himpunan yang *tak terhitung* (*uncountable*), maka proses stokastik tsb disebut **proses stokastik dengan waktu kontinu** (**continuous-time process**).

Contoh:

- Proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ dimana $t \in \Re$ adalah contoh proses stokastik kontinu.
- Proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ yang menyatakan harga saham pada saat t merupakan contoh proses stokastik dengan waktu kontinu.

Beberapa kelas proses stokastik yang penting:

1. Independent increments process

Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ disebut independent increments process jika untuk setiap $a < b < c < d$, $X(b) - X(a)$ dan $X(d) - X(c)$ merupakan peubah acak yang saling bebas (independent).

Contoh:

Proses Wiener dan Proses Poisson adalah contoh proses stokastik yang termasuk dalam kelas independent increment process.

2.Stationary process (proses stasioner)

Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ disebut stationary process jika untuk setiap k, untuk setiap τ, dan untuk setiap $t_1, t_2, \ldots, t_k$,

$$F(x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \ldots, x(t_k + \tau)) = F(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_k)),$$

dimana $F(.)$ menyatakan fungsi distribusi kumlatif.

Dengan kata lain, proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ disebut stationary process jika seluruh sifat-sifat statistik tidak berubah terhadap waktu.

Contoh:

- Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ yang berupa barisan peubah acak iid merupakan proses stasioner.
- Proses stokastik yang berbentuk deret waktu yang bersifat musiman (seasonal time series) merupak contoh proses non-stasioner.

3.Proses Markov

Proses Markov adalah proses stokastik yang memiliki sifat: hanya nilai peubah acak saat ini yang relevan untuk memprediksi nilai peubah acak pada waktu yang akan datang.

Contoh:

- Proses stokastik yang menggambarkan proses pergerakan harga saham umumnya diasumsikan merupakan proses Markov. Jika proses pergerakan diasumsikan mengikuti proses Markov maka harga saham pada waktu yang akan datang hanya dipengaruhi oleh harga saat pada saat sekarang dan tidak dipengaruhi oleh harga saat pada waktu lampau. Disini diasumsikan bahwa harga saham pada saat sekarang sudah memuat semua informasi tentang harga saham pada waktu lampau.
- Misalkan proses stokastik dengan waktu diskret $\{X_n, n = 0,1,2, \ldots\}$ mengikuti proses Markov.

  Maka

$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0)$= $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}$ dengan $X_n = i$ menyatakan bahwa pada saat $t = n$ berada pada state i dan P_{ij} menyatakan peluang state yang sedang berada pada state i akan berpindah ke state j setelah bergerak satu unit waktu.

Proses stokastik dengan sifat seperti ini disebut rantai Markov (Markov chain).

- Contohnya adalah peramalan cuaca. Diasumsikan peluang besok akan hujan atau tidak hanya bergantung pada kondisi cuaca pada saat ini, apakah hari ini hujan atau tidak, dan tidak bergantung pada kondisi cuaca pada hari-hari sebelumnya. Proses stokastik ini disebut Markov chain dengan 2 state, peluang berpindah dari satu state ke state lain dinyatakan dalam matriks transisi $P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$ dimana α: peluang besok akan hujan jika diketahui hari ini hujan dan β: peluang besok akan hujan jika diketahui hari ini tidak hujan.

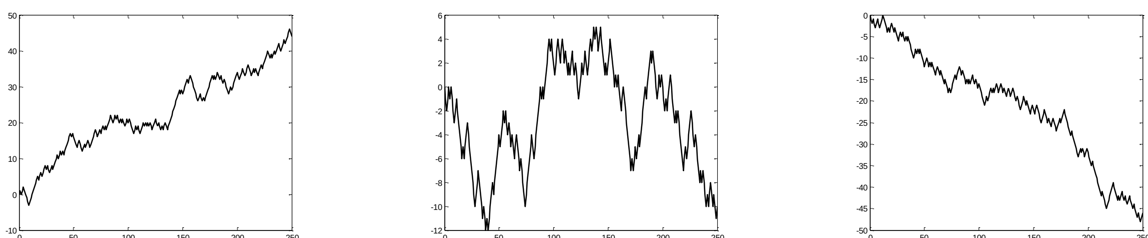
Ada beberapa contoh proses stokastik yang sering digunakan dalam matematika keuangan.

1.Random walk:

Random walk didefinisikan sebagai rantai Markov (Markoc chain) dengan ruang state $0, \pm1, \pm2, \dots$ dan memenuhi sifat:

$p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i-1}$, untuk suatu p yang nilainya $0 < p < 1$.

Untuk mengilustrasikan model random walk, bayangkan seorang pemabuk yang berupaya berjalan kearah depan, tetapi karena mabuk, pada setiap langkah maju, orang tsb akan bergeser 1 langkah ke kanan atau bergeser 1 langkah ke arah kiri.



Realisasi dari random walk dengan p=0.6 (kiri), p=0.5 (tengah) dan p=0.4 (kiri)

2.Proses Wiener

Proses Wiener didefinisikan sebagai stokastik Gaussian $\{W(t), t \geq 0\}$ yang bersifat independent increment dan memenuhi ketiga sifat berikut :

1. $W(0) = 0$
2. $E\big(W(t)\big) = 0$
3. $Var\big(W(t) - W(s)\big) = t - s$, untuk setiap $0 \leq s \leq t$

Dengan kata lain pada interval waktu dt yang cukup kecil,

- Increment dari process Wiener $dW(t) = W(t + dt) - W(t) = \varepsilon\sqrt{dt}$, dimana ε: peubah acak normal baku.
- $E\big(dW(t)\big) = 0$
- $Var\big(dW(t)\big) = dt$

Realisasi dari Wiener proses

3.Proses Poisson

Proses Poisson dengan parameter intensitas $\lambda > 0$ didefinisikan sebagai proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ yang memenuhi sifat:

1. $X(0) = 0$
2. $X(t) - X(s)$ berdistribusi Poisoon dengan parameter $\lambda(t - s)$ untuk semua $0 \leq s < t$
3. Increments $(X_{t_2} - X_{t_1})$ dan $(X_{t_4} - X_{t_3})$ independent untuk semua $0 < t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$.

Berarti :

- Mean $\mu(t) = E(X(t)) = \lambda t, \quad \forall t \in T$
- Variansi $\sigma^2(t) = Var(X(t)) = \lambda t, \quad \forall t \in T$
- Kovariansi:

$$C(s,t) = Covar\big(X(s), X(t)\big) = E\big((X(s) - \mu(s))(X(t) - \mu(t))\big) = \lambda \min(s,t), \qquad \forall s,t > 0$$

Daftar Pustaka:

[1] Hogg, R.V., McKean, J.W. and Craig, A.T. (2005). Introduction to Mathematical Statistics, 6th ed. Prentice Hall.

[2] Ross, S.M. (1997). Introduction to Probability Models. 6th ed. Academic Press.

[3] Hull, J.C. 2000. *Options, Futures, & Other Derivatives,* 4th Ed. Prentice Hall Int., New Jersey.

[4] Kloeden, P.E., Platen, E. 1995. *Numerical Solution of StochasticDifferential Equations*.Springer, Berlin.

Tugas untuk diunggah di SCeLE
(untuk no 2 dan 3, Anda unggah juga programnya):

1. Salah satu contoh proses stokastik adalah mean reversion process yang digunakan oleh Vasicek untuk memodelkan tingkat bunga (lihat modul Model Tingkat Bunga). Untuk membantu Anda memahami apa yang dimaksud dengan mean reversion process, lakukan penelusuran literatur mengenai mean reversion process, dan sebutkan paling sedikit 1 link yang berkaitan dengan model tsb.

2. Memahami sifat aditif distribusi normal menggunakan simulasi Monte Carlo dengan bantuan Matlab.

a) Bangkitkan 2 peubah acak X dan Y yang saling bebas, dimana $X \sim \text{normal}(\mu_X, \sigma_X^2)$ dan peubah acak $Y \sim \text{normal}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Silakan Anda pilih nilai parameter-parameter tsb, kemudian definisikan peubah acak $Z = X + Y$.

b) Ulangi simulasi tsb sebanyak n = 100.000 kali.

c) Gambar histogram dari Z menggunakan bantuan syntax (pada matlab): histfit

d) Hitung mean dan variansi dari Z (sebut sebagai μ_Z dan σ_Z^2). Buat qqplot $\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}$ dengan bantuan syntax: qqplot.

e) Sifat apakah yang dapat Anda simpulkan dari hasil d dan e.

3. Memahami hubungan antara distribusi normal dan lognormal menggunakan simulasi Monte Carlo dengan bantuan Matlab

a) Bangkitkan peubah acak $X \sim \text{lognormal}$ dengan parameter μ_X dan σ_X^2 yang berukuran (1,100000). Silakan Anda pilih nilai parameter-paramter tsb, kemudian definisikan peubah acak $Z = \log{(X)}$.

b) Hitung mean dan variansi dari Z.

c) Gambar histogram dari Z menggunakan bantuan syntax: histfit

d) Hitung mean dan variansi dari Z (sebut sebagai μ_Z dan σ_Z^2). Buat qqplot $\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}$ dengan bantuan syntax: qqplot.

e) Sifat apakah yang dapat Anda simpulkan dari hasil b,c dan d.

Latihan mandiri:

1.Sebuah percobaan acak dilakukan dengan cara melemparkan dua buah dadu.

a. Tentukan ruang sampel dari percobaan tsb

b. Jika didefinisikan peubah acak X menyatakan jumlah kedua mata dadu.
Tentukan ruang atau range dari X.

c. Misalkan kejadian A: jumlah kedua mata dadu sama dengan 8 dan kejadian B: nilai mata dadu pertama berupa bilangan ganjil. Hitunglah $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$ dan $P(B|A)$

2. Sebuah kotak berisi 8 bola yang identik tetapi berbeda warna: 3 bola berwarna merah dan 5 bola berwarna biru. Diambil 3 bola secara acak. Definisikan peubah acak X yang menyatakan jumlah bola merah yang terambil.

a. Tentukan ruang dari X

b. Tentukan fungsi massa peluang dari X, dan gambarkan fungsi massa peluang tsb.

c. Tentukan fungsi distribusi kumulatif dari X, dan gambarkan fungsi distribusi kumulatif tsb.

d. Hitunglah peluang akan diperoleh paling sedikit 1 buah bola berwarna merah.

e. Hitunglah mean dan variansi dari X

f. Seorang yang ingin ikut serta dalam permainan bola tsb akan memperoleh $\$ 2$ untuk setiap bola merah yang berhasil diambil tetapi harus membayar $\$ 1$ untuk setiap bola biru yang terambil. Berapa $ pemain tsb harus membayar untuk pengambil 3 bola secara acak agar permainan bola tsb 'fair' (tidak menguntungkan dan juga tidak merugikan baik untuk pemain dan bandar permainan).

3.Sebuah peubah acak kontinu X memiliki fungsi padat peluang:

$$f(x) = Kx + \frac{1}{2}, \qquad 0 < x < 1$$

a. Tentukan nilai K
b. Tentukan fungsi distribusi dari X
c. Hitunglah $P(X < \frac{1}{2})$, $P(X = \frac{1}{2})$, $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P\left(X < \frac{3}{4} \middle| X \geq \frac{1}{2}\right)$

4. Diketahui peubah acak diskret X memiliki fungsi padat peluang

$$f(x) = \frac{x+2}{18}, -2 < x < 4.$$

Hitunglah mean dan variansi dari X.

5.. Peubah acak X dan Y berdistribusi normal dengan parameter $\mu_X = \mu_Y = \mu$ dan $\sigma_X = \sigma_y = \sigma$. Jika peubah acak X dan Y saling bebas, tunjukkan bahwa $X + Y$ dan $X - Y$ saling bebas.

6. Log dari harga saham pada saat t, ditulis $log(S(t))$, berdistribusi normal dengan

mean $E\big(log(S(t))\big) = log(S(0)) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$

variansi $var\big(log(S(t))\big) = \sigma^2 t$

Diketahui harga saham pada saat sekarang $S(0)$= 100; expected rate of return μ =0.06 per tahun; dan volatility σ= 0.2 per tahun.

a. Hitunglah mean dan variansi dari $log(S(0.5)/S(0))$
b. Tentukan distribusi dari $S(t)$, kemudian hitunglah mean dan variansi dari $S(0.5)$
c. Hitunglah $P(S(0.5) > 105)$

7. Ambil waktu diskret: $t_0, t_1, t_3, \ldots$ dimana $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, i=0,1,...; t_0=0 dan Δt=1 (hari). Diasumsikan dari $t = t_i$ ke $t = t_{i+1}$ hanya ada dua kemungkinan yaitu harga saham akan bergerak naik dengan faktor skala 1.2 dan dengan peluang 0.6 ; atau turun dengan faktor skala 0.8 dan dengan peluang 0.4. Diketahui harga saham pada saat sekarang $S(0) = 100$. Hitunglah $E(S(t_3))$