MODUL 1
TERMINOLOGI DASAR PDP

Tujuan :

1. Menjelaskan definisi PDP
2. Menjelaskan klasifikasi PDP

Selanjutnya, dapat didefinisikan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

Definisi 1 (Persamaan Diferensial Parsial) *Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel dependen terhadap dua atau lebih variabel independen.*

Persamaan diferensial parsial untuk fungsi u atas dua variabel independen dalam bentuk mathematis secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots\right) = 0 \quad (1)$$

dengan x dan y adalah variabel independen yang termuat dalam suatu domain D di $\mathbb{R}$. Lebih lanjut, batas domain dinotasikan dengan ∂D.
Dilihat dari jenis domainnya, persamaan diferensial parsial dibagi menjadi dua jenis. Jika domain yang dimaksud disini merupakan domain untuk variabel posisi x dan waktu t, maka domain ini kemudian disebut dengan domain posisi dan waktu (*spacetime domain*) sementara persamaan yang memuat variabel waktu disebut dengan **persamaan evolusi**. Jika kedua variabel merupakan variabel posisi, x dan y, maka persamaannya disebut dengan **persamaan ekuilibirum** (*steady state*).

Hukum-hukum dasar yang disajikan dalam bentuk persamaan diferensial, antara lain:

1. **Persamaan Transport**,
$$e_x + e_t = 0, e = e(x, t).$$
2. **Persamaan Gelombang**,
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, u = u(x, t).$$

3. **Persamaan Panas**,
$$u_t - ku_{xx} = 0, u = u(x,t).$$
4. **Persamaan Laplace**,
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, u = u(x,y).$$
5. **Persamaan Burgers** dimensi satu di bidang dinamika fluida tentang gerakan *viscid* fluida.
$$u_t + cuu_x - ku_{xx} = 0, u = u(x,t).$$
6. **Persamaan Black Scholes** di bidang matematika keuangan tentang harga opsi Eropa,
$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0.$$
7. **Persamaan Beam Euler-Bernoulli** di bidang teori elastisitas,
$$u_{tt} + \alpha^4 u_{xxxx} = 0.$$

Meskipun demikian, aplikasi persamaan diferensial parsial yang dibahas pada buku ini hanya terbatas pada fungsi atas dua variabel independen yaitu persamaan transport, persamaan gelombang, persamaan panas dan persamaan laplace.

1 Klasifikasi

Klasifikasi persamaan diferensial dapat dilihat dari order, homogenitas dan linearitas. Misalkan Persamaan diferensial parsial 1 dinyatakan dalam bentuk lain:
$$L(u) = g(x,y). \tag{2}$$
dengan L adalah operator differensial.

1. Klasifikasi menurut order.
   Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan berdasarkan ordernya, yaitu tingkatan turunan tertinggi pada persamaan.

2. Klasifikasi menurut homogenitas.
   Suatu persamaan diferensial dikatakan homogen jika $g = 0$ dan dikatakan nonhomogen jika $g \neq 0$.

3. Klasifikasi menurut linearitas.
   Persamaan diferensial 2 dikatakan linear apabila untuk setiap konstanta $a, b \in R$ dan setiap fungsi $u, v \in C^n$ memenuhi sifat
$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

Sebagai contoh, persamaan Transport adalah persamaan diferensial order satu karena turunan tertingginya tingkat 1 sementara Persamaan Gelombang, Persamaan Panas dan Persamaan Panas merupakan persamaan diferensial order dua. Contoh lain, Persamaan Beam $u_t + u_{xxx} = 0$ merupakan persamaan diferensial order tiga.

2 Solusi

Definisi 2 (Solusi) *Diberikan persamaan diferensial parsial dalam bentuk 1. Suatu fungsi atas dua variabel $\phi(x, y)$ disebut solusi dari persamaan tersebut jika berlaku*

$$F\left(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}, \cdots\right) = 0$$

Dilihat dari cara menyajikannya, solusi dibagi menjadi dua jenis. Bentuk $u = \phi\,(x, y)$ disebut dengan solusi eksplisit sementara hubungan yang memenuhi $\Phi(x, y, u) = 0$ disebut dengan solusi implisit.

3 Nilai Awal dan Syarat Batas

Secara umum, jika suatu persamaan diferensial parsial mempunyai solusi, maka solusinya ada tak hingga banyak. Untuk memperoleh solusi tunggal, maka persamaan diferensial perlu dilengkapi dengan informasi nilai awal atau syarat batas pada domainnya. Domain yang sering digunakan dalam aplikasi adalah domain posisi $\bar{x}$ dan domain waktu t. Untuk kasus 1 dimensi, variabel posisi biasanya dinyatakan dalam notasi $\bar{x} = x$, untuk kasus 2 dimensi, $\bar{x} = (x, y)$, sementara untuk kasus 3 dimensi, $\bar{x} = (x, y, z)$.
Jika domain untuk variabel independen bersifat terbatas, syarat batas menyatakan perilaku fungsi di batas domainnya. Suatu persamaan diferensial yang dilengkapi dengan syarat batas kemudian disebut dengan **masalah syarat batas**. Terdapat tiga jenis syarat batas yang muncul di banyak aplikasi, disebut juga dengan **syarat batas klasik**, sebagai berikut:

1. Jika diketahui nilai dari solusi di batas domainnya, maka disebut syarat batas *Dirichlet*.

2. Jika yang diketahui adalah nilai turunan dari solusi di batas domainnya, maka disebut syarat batas *Neumann*

3. Jika diketahui nilai solusi dan turunannya di batas domain, maka disebut syarat batas *Robin*.

Untuk mendapatkan solusi khusus dari persamaan diferensial yang tunggal dan stabil, jenis dari Persamaan diferensial menentukan syarat batas apakah yang diperlukan. Selanjutnya terkait dengan domain waktu t. Suatu persamaan diferensial yang dilengkapi dengan nilai awal disebut dengan **masalah nilai awal**. Suatu persaman diferensial yang dilengkapi dengan syarat batas dan nilai awal disebut dengan **masalah nilai awal syarat batas**.

Contoh 1: Tentukan solusi dari $u_y = 0$ dengan $u = u(x, y)$.

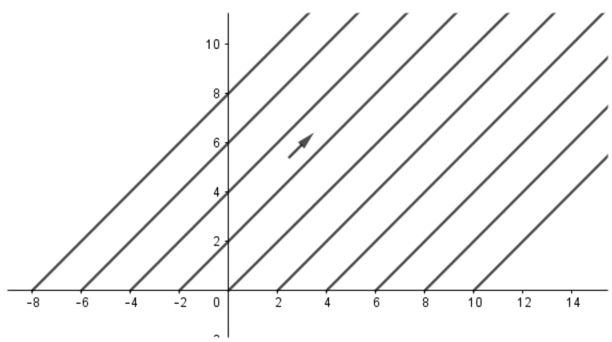
Jawab:
Karena u bernilai konstan untuk setiap y, maka u hanya bergantung atas x saja. Akibatnya, sebarang fungsi atas x memenuhi persamaan diferensial pada Contoh **??**. Jadi, solusi umumnya adalah $u(x, y) = f(x)$, untuk f sebarang fungsi atas variabel x.

Contoh 2: Tentukan solusi dari $f_x + f_t = 0$ dengan $f = f(x, t)$.

Jawab:
Perhatikan bahwa ruas kiri persamaan di Contoh **??** dapat dinyatakan sebagai turunan berarah fungsi f pada arah $(1, 1)$. Oleh karena itu, persamaan di Contoh **??** dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$D_{\vec{v}} f = 0$$

Jadi, f merupakan fungsi yang bernilai konstan pada arah $(1, 1)$. Perhatikan bahwa garis $x = t + c$ untuk sebarang konstanta real c juga mempunyai arah kemiringan $(1, 1)$. Akibatnya $x - t$ selalu bernilai konstan. Jadi, $f(x, t) = g(x - t)$ dengan g sebarang fungsi atas $x - t$.



Gambar 1: vektor $(1, 1)$

Contoh 3: Tunjukkan bahwa fungsi $u = f\left(x^2 + y^2\right)$ merupakan solusi dari persamaan diferensial $yu_x = xu_y$ untuk sebarang fungsi f.

Jawab:

Dimisalkan $z = x^2 + y^2$, maka
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$
Menggunakan aturan rantai diperoleh
$$u_x = \frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(z),$$
dan
$$u_y = \frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(z).$$
Darisini diperoleh
$$yu_x = y\left[2xf'(z)\right] = x\left[2yf'(z)\right] = xu_y.$$
Terbukti.

Contoh 4: Tunjukkan bahwa fungsi $u = ax + by + ab$ merupakan solusi dari $u = xu_x + yu_y + u_x u_y$.

Jawab:
Dari definisi turunan parsial diperoleh
$$u_x = a, \quad \text{dan} \quad u_y = b.$$
Akibatnya
$$xu_x + yu_y + u_x u_y = xa + yb + ab = u.$$
Terbukti.

Contoh 5: Tentukan solusi khusus dari persamaan $2u_t + 3u_x = 0$ dengan syarat awal $u(x,0) = \sin x$.

Jawab:
Perhatikan bahwa $2u_t + 3u_x = 0$ dapat direpresentasikan bahwa turunan berarah fungsi u pada arah $\langle 2, 3\rangle$ bernilai nol. Jadi, fungsi u bernilai konstan ada arah tersebut. Selanjutnya semua pasangan (x,t) yang terletak pada garis $2x - 3t = c$, nilai $2x - 3t$ bernilai konstan. Jadi, sebarang fungsi atas $2x - 3t$ juga bernilai konstan. Akibatnya diperoleh
$$u(x,t) = g(2x - 3t)$$
adalah solusi umum dari persamaan $2u_t + 3u_x = 0$. Selanjutnya, karena $u(x,0) = \sin x$, maka
$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin x, \\ g(2x) &= \sin x \\ g(x) &= \sin \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, darisini diperoleh solusi khususnya adalah

$$u(x,t) = \sin \frac{2x - 3t}{2}.$$

Terminologi Dasar PDP

1. Persamaan diferensial parsial untuk fungsi u atas dua variabel independen dalam bentuk mathematis secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

   $$F\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots\right) = 0$$

   dengan x dan y adalah variabel independen yang termuat dalam suatu domain D di $\mathbb{R}$.

2. Klasifikasi persamaan diferensial dapat dilihat dari order, homogenitas dan linearitas.

3. Dilihat dari cara menyajikannya, solusi dibagi menjadi dua jenis. Bentuk $u = \phi\,(x, y)$ disebut dengan solusi eksplisit sementara hubungan yang memenuhi $\Phi(x, y, u) = 0$ disebut dengan solusi implisit.

4. Terdapat tiga jenis syarat batas yang muncul di banyak aplikasi, disebut juga dengan **syarat batas klasik**, sebagai berikut:

   (a) Jika diketahui nilai dari solusi di batas domainnya, maka disebut syarat batas *Dirichlet*.

   (b) Jika yang diketahui adalah nilai turunan dari solusi di batas domainnya, maka disebut syarat batas *Neumann*

   (c) Jika diketahui nilai solusi dan turunannya di batas domain, maka disebut syarat batas *Robin*.

Latihan
Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal Isikan Latihan Soal