

MODUL 2

PDP ORDE DUA

DAN KLASIFIKASINYA

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat membedakan klasifikasi PDP Orde Dua.
2. Mahasiswa dapat mengidentifikasi klasifikasi berdasarkan domainnya.

1 PDP Orde Dua

Sesuai namanya, PDP Orde Dua paling tinggi memuat turunan tingkat dua dalam persamaan. Pada materi ini, hanya akan dikaji mengenai PDP Orde Dua Linear untuk dua variabel.

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = d(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1)$$

Persamaan diferensial karakteristik untuk Persamaan Diferensial 1 adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

2 Klasifikasi Koefisien Konstan

Selanjutnya untuk $a(x, y) = A, b(x, y) = B$ dan $c(x, y) = C$ Persamaan Diferensial 1 untuk koefisien konstan dapat diklasifikasikan menjadi tiga jenis sebagai berikut

- $D > 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik real, PD 1 disebut dengan PD Hiperbolik.
- $D = 0$, maka terdapat satu kurva karakteristik, PD 1 disebut dengan PD Parabolik.
- $D < 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik kompleks, PD 1 disebut dengan PD Eliptik.

dengan

$$D = B^2 - 4AC$$

3 Klasifikasi Koefisien Variabel

Sementara untuk koefisien variabel PD dapat diklasifikasikan menjadi tiga jenis sebagai berikut berdasarkan titik-titiknya

- $D > 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik real, PD 1 disebut dengan PD Hiperbolik.
- $D = 0$, maka terdapat satu kurva karakteristik, PD 1 disebut dengan PD Parabolik.
- $D < 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik kompleks, PD 1 disebut dengan PD Eliptik.

dengan

$$D = b(x, y)^2 - 4a(x, y)c(x, y)$$

Contoh 1 : Tentukan jenis PD pada persamaan gelombang berikut berdasarkan klasifikasi koefisien konstan.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Jawab :

Karena $A = 1, B = 0, C = -c^2$ maka $D = 4c^2 > 0$. Akibatnya, Persamaan gelombang merupakan PD hiperbolik di setiap anggota domain.

Contoh 2 : Tentukan jenis PD pada persamaan panas berikut berdasarkan klasifikasi koefisien konstan.

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

Jawab :

Karena $A = 0, B = 0, C = -k$, maka $D = 0$. Akibatnya, persamaan panas merupakan PD parabolik di setiap anggota domain.

Contoh 3 : Tentukan jenis PD pada persamaan laplace berikut berdasarkan klasifikasi koefisien konstan.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Jawab :

Karena $A = 1, B = 0, C = 1$ maka $D = -4$ sehingga persamaan laplace merupakan PD Eliptik di setiap anggota domain.

Contoh 4 : Tentukan jenis PD pada persamaan tricomi berikut berdasarkan klasifikasi koefisien variabel.

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Jawab :

Karena $A = y, B = 0, C = 1$ maka $D = -4y$. Darisini diperoleh bahwa persamaan tricomi merupakan PD Hiperbolik untuk $y < 0$, merupakan PD Parabolik untuk $y = 0$ dan merupakan PD Eliptik untuk $y > 0$.

Ringkasan PDP Orde Dua dan Klasifikasinya

1. Bentuk umum PDP Orde Dua Linear untuk dua variabel.

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = d(x, y, u, u_x, u_y)$$

2. Karakteristik Persamaan Diferensial Orde Dua.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Tiga jenis Persamaan Diferensial berdasarkan klasifikasi koefisien konstan untuk $a(x, y) = A$, $b(x, y) = B$ dan $c(x, y) = C$.

- $D > 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik real, PD disebut dengan PD Hiperbolik.
- $D = 0$, maka terdapat satu kurva karakteristik, PD disebut dengan PD Parabolik.
- $D < 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik kompleks, PD disebut dengan PD Eliptik.

dengan

$$D = B^2 - 4AC$$

4. Koefisien variabel PD dapat diklasifikasikan menjadi tiga jenis sebagai berikut berdasarkan titik-titiknya.

- $D > 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik real, PD disebut dengan PD Hiperbolik.
- $D = 0$, maka terdapat satu kurva karakteristik, PD disebut dengan PD Parabolik.
- $D < 0$, maka terdapat dua kurva karakteristik kompleks, PD disebut dengan PD Eliptik.

dengan

$$D = b(x, y)^2 - 4a(x, y)c(x, y)$$

Latihan

1. Tentukan apakah persamaan diferensial berikut merupakan PD hiperbolik, parabolik atau eliptik.

(a) $u_{yy} + yu_{xy} + xu_{xx}$

(b) $x^2u_{yy} - u_{xx} + u$

(c) $yu_{yy} + 2u_{xy} + xu_{xx} + u_x$

2. Tentukan daerah dari domain persamaan diferensial berikut yang merupakan hiperbolik, parabolik atau eliptik.

(a) $2u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} - u = 0$

(b) $u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} + \sin(xy)u = 5$

(c) $yu_{xx} - 2u_{xy} + e^xu_{yy} + x^2u_x - u = 0$