MODUL 3
BENTUK KANONIK

Tujuan :

1. Mahasiswa dapat menentukan bentuk kanonik dari PDP Orde Dua.

1 PDP Orde 2

Sesuai namanya, PDP Orde Dua paling tinggi memuat turunan tingkat dua dalam persamaan. Pada materi ini, hanya akan dikaji mengenai PDP Orde Dua Linear untuk dua variabel.

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = d(x,y,u,u_x,u_y) \tag{1}$$

Persamaan diferensial karakteristik untuk Persamaan Diferensial 1 adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

2 Transformasi

Perhatikan kembali transformasi koordinat $(x,y) \to (\xi,\eta)$ dimana ξ dan η keduanya nilainya bergantung atas x dan y. Jika didefinisikan

$$J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \tag{3}$$

sebagai matriks Jacobian, maka agar transformasi mempunyai bersifat satu-satu dan mempunyai invers, det $J \neq 0$.
Pada turunan pertama didapatkan

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \tag{4}$$

Selanjutnya untuk turunan kedua didapatkan

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}\left(\xi_x\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\left(\eta_x\right)^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\left(\xi_y\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\left(\eta_y\right)^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \end{aligned} \tag{5}$$

3 PD Baru

Substitusikan Persamaan-persamaan 4 dan 5 kedalam Persamaan 1, maka diperoleh PD dalam koordinat baru sebagai berikut :

$$\bar{A}(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + \bar{B}(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + \bar{C}(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \bar{E}(\xi,\eta,u,u_\eta,u_\xi) \tag{6}$$

dengan

$$\begin{aligned} \bar{A}(\xi,\eta) &= A(\xi_x)^2 + B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2 \\ \bar{B}(\xi,\eta) &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ \bar{C}(\xi,\eta) &= A(\eta_x)^2 + B\eta_x\eta_y + C(\eta_y)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Lebih lanjut lagi, perhatikan bahwa determinan dari PD dalam koordinat yang baru adalah

$$\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} = (B^2 - 4AC)(\eta_x\xi_y - \eta_y\xi_x)^2. \tag{8}$$

4 Bentuk Kanonik PD Hiperbolik

Untuk PD hiperbolik, nilai diskriminan bernilai positif. Misalkan persamaan karakteristik dari PD hiperbolik adalah $y_x = -\lambda_1$ dan $y_x = -\lambda_2$, dengan solusinya adalah

$$f_1(x,y) = c_1 \text{ dan } f_2(x,y) = c_2,$$

Dari solusi tersebut, jika dipilih koordinat yang baru $\xi = f_1(x,y)$ dan $\eta = f_2(x,y)$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial\xi}{\partial y} \quad \rightarrow \quad 0 &= \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \xi_x &= \lambda_1\xi_y \end{aligned} \tag{9}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial\eta}{\partial y} \quad \rightarrow \quad 0 &= \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\ \eta_x &= \lambda_2\eta_y \end{aligned} \tag{10}$$

Substitusikan 9 pada 7 maka diperoleh

$$\bar{A}(\xi,\eta) = (A\lambda_1^2 + B\lambda_1 + C)\xi_y^2$$

sementara substitusi 11 pada 7 diperoleh

$$\bar{C}(\xi,\eta) = (A\lambda_2^2 + B\lambda_2 + C)\eta_y^2.$$

Akibatnya jika dipilih λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

maka diperoleh $\bar{A} = 0$ dan $\bar{C} = 0$. Darisini diperoleh bahwa bentuk kanonik untuk PD hiperbolik dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$u_{\xi,\eta} = \hat{E}(\eta, \xi, u, u_\eta, u_\xi)$$

5 Bentuk Kanonik PD Parabolik

Karena diskriminan bernilai 0, maka hanya terdapat satu persamaan karakteristik yaitu

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda$$

Jika $f(x, y) = c$ adalah solusi dari persamaan diferensial karakteristiknya maka dipilih koordinat yang baru adalah $\eta = x$ dan $\xi = f(x, y)$. Darisini diperoleh bahwa

$$\eta_x = 1,\ \eta_y = 0,\ \text{dan}\ \xi_x = \lambda\xi_y \tag{11}$$

Substitusikan 11 pada persamaan 7 maka diperoleh bahwa $A = 0$. Kemudian karena $A = 0$ dan diskriminan dari PD 1 bernilai nol, maka dari Persamaan 8 diperoleh $B = 0$. Jadi, bentuk kanonik dari PD parabolik adalah

$$u_{\eta\eta} = \hat{d}(\eta, \xi, u, u_\eta, u_\xi)$$

Contoh 1 : Tentukan solusi dari PD berikut:

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

Jawab :

1. Persamaan kuadrat yang bersesuaian

$$\begin{aligned} 3\lambda^2 + 10\lambda + 3 &= 0, \\ (3\lambda + 1)(\lambda + 3) &= 0, \\ 3\lambda + 1 = 0 \quad \text{atau} &\quad \lambda + 3 = 0, \end{aligned}$$

   jadi, solusinya adalah $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ dan $\lambda_2 = -3$.

2. Persamaan Karakteristik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dx} = 3.$$

Solusinya adalah $y - \frac{1}{3}x = c_1$ dan $y - 3x = c_2$.

3. Pilih koordinat baru $\xi = y - \frac{1}{3}x$ dan $\eta = y - 3x$. Darisini diperoleh

$$\xi_x = -\frac{1}{3}, \quad \eta_x = -3$$
$$\xi_y = 1, \quad \eta_y = 1.$$

4. Transformasi PDP dalam koordinat (x, y) menjadi koordinat (ξ, η).

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{3}u_\xi - 3u_\eta. \\ u_{xx} &= \frac{1}{9}u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= -\frac{1}{3}u_{\xi\xi} - \frac{10}{3}u_{xy} - 3u_{yy} \\ u_y &= u_\xi + u_\eta \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

5. Substitusi pada PDP diperoleh solusi umum

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad u(\xi, \eta) &= F(\xi) + G(\eta) \\ u(x, y) &= F(y - \frac{1}{3}x) + G(y - 3x). \end{aligned}$$

Contoh 2 : Tentukan solusi dari PD berikut:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y)$$

Jawab :

1. Persamaan kuadrat yang bersesuaian adalah

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Jadi solusinya adalah $\lambda = -1$.

2. Persamaan karakteristiknya adalah
$$\frac{dy}{dx} = 1.$$
Jadi, solusi karakteristiknya adalah $y - x = c$.

3. Dipilih transformasi koordinat $\xi = y - x$ dan $\eta = x$.
$$\begin{aligned} \xi_x = -1, &\quad \eta_x = 1 \\ \xi_y = 1, &\quad \eta_y = 0. \end{aligned}$$

4. Transformasi PDP dalam (x, y) menjadi (ξ, η).
$$\begin{aligned} u_x &= -u_\xi + u_\eta \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

5. Substitusikan pada PDP maka diperoleh
$$u_{\eta\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad u_\eta = F(\xi) \quad \rightarrow \quad u = \eta F(\xi) + G(\xi)$$
Jadi, solusi umum dari PDP adalah $u(x, y) = xF(y - x) + G(y - x)$.

Ringkasan Bentuk Kanonik

1. Langkah-langkah mencari solusi PDP Linear Orde 2 Hiperbolik adalah
   (a) Tentukan persamaan kuadrat yang bersesuaian
   $$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$
   Misalkan solusinya adalah λ_1 dan λ_2.
   (b) Tentukan solusi dari Persamaan Karakteristik
   $$\frac{dy}{dx} = -\lambda_1 \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda_2.$$
   Misalkan solusinya adalah $f(x,y) = c_1$ dan $g(x,y) = c_2$.
   (c) Pilih koordinat baru $\xi = f(x,y)$ dan $\eta = g(x,y)$.
   (d) Transformasi PDP dalam koordinat (x,y) menjadi koordinat (ξ,η). Bentuk PDP baru adalah
   $$u_{\xi,\eta} = \hat{E}(\eta,\xi,u,u_\eta,u_\xi)$$
   Selesaikan.
2. Langkah-langkah mencari solusi PDP Linear Orde 2 Parabolik adalah
   (a) Tentukan persamaan kuadrat yang bersesuaian
   $$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$
   Misalkan solusinya adalah λ
   (b) Tentukan solusi dari Persamaan Karakteristik
   $$\frac{dy}{dx} = -\lambda.$$
   Misalkan solusinya adalah $f(x,y) = c$.
   (c) Pilih koordinat baru $\xi = f(x,y)$ dan $\eta = x$.
   (d) Transformasi PDP dalam koordinat (x,y) menjadi koordinat (ξ,η). Bentuk PDP baru adalah
   $$u_{\eta,\eta} = \hat{E}(\eta,\xi,u,u_\eta,u_\xi)$$
   Selesaikan.

Latihan

1. Tentukan solusi umum dari PDP berikut

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y).$$

2. Tentukan solusi umum dari PDP berikut

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, u = u(x, t).$$

3. Tentukan solusi umum dari PD berikut :

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y).$$

4. Tentukan solusi umum dari Persamaan panas berikut :

$$u_t = ku_{xx}, \quad u = u(x, t).$$