Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Gelombang 1D

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

May 25, 2021

Overview

Model Persamaan Gelombang

Misalkan akan dimodelkan gelombang transversal, pergerakan partikel hanya terjadi secara vertikal saja, yang terjadi pada tali elastis dengan amplitudo kecil.

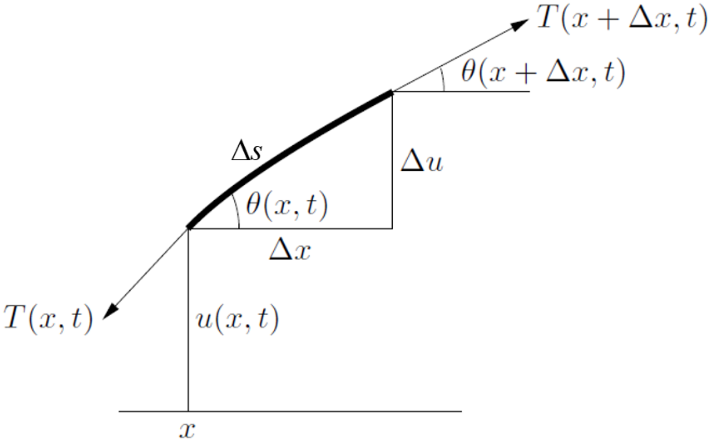
Notasi-notasi yang digunakan adalah

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \text{perpindahan tali secara vertikal pada posisi } x \text{ dan waktu } t \\ \theta(x,t) &= \text{sudut yang dibentuk oleh tali dan garis horisontal pada posisi } x \\ &\quad \text{dan waktu } t \\ T(x,t) &= \text{tegangan tali pada posisi } x \text{ dan waktu } t \\ \rho(x) &= \text{densitas massa tali pada posisi } x \end{aligned}$$

Akan dicari persamaan untuk u sebagai fungsi atas variabel independen x dan t. Model diperoleh dari Hukum Newton terkait gaya-gaya yang bekerja pada tali.

Ilustrasi

Berikut ilustrasi gaya yang bekerja pada bagian kecil tali.

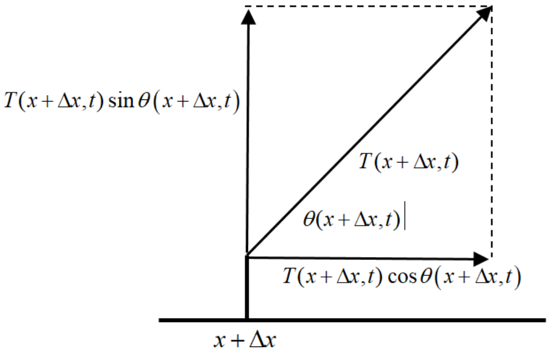


Gambar 1: Tegangan pada ujung partisi

Gaya-gaya yang bekerja I

Gaya-gaya yang bekerja di sepanjang bagian kecil dari tali tersebut adalah

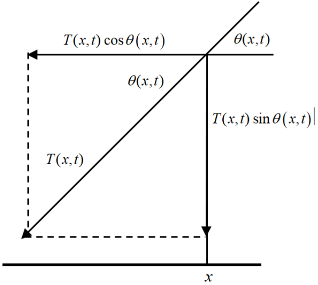
1. Tegangan akibat tarikan ke kanan pada sudut $\theta(x + \Delta x, t)$ sebesar $T(x + \Delta x, t)$ di atas garis horisontal.



Gambar 2: Tegangan di posisi $x + \Delta x$

Gaya-gaya yang bekerja II

2. Tegangan akibat tarikan ke kiri pada sudut $\theta(x,t)$ sebesar $T(x,t)$ di bawah garis horisontal.



Gambar 3: Tegangan di posisi x

3. Gaya-gaya eksternal lain yang bekerja di sepanjang Δx misalkan gaya gravitasi dan lain-lain. Notasikan, total gaya eksternal lain di sepanjang bagian tersebut adalah $F(x,t)\Delta x$

Karena diasumsikan gerak partikel hanya terjadi secara vertikal saja, maka Menurut Hukum Newton

- secara vertikal, $\sum Fv = m \cdot a$
- secara horisontal, $\sum Fh = 0$

dengan

$$\begin{aligned} m &= \rho(x) \cdot \Delta s \qquad \text{dan} \quad a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ &= \rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} \end{aligned}$$

Dilihat dari penjabaran gaya-gaya yang bekerja pada slide sebelumnya, pada arah vertikal berlaku

$$T(x+\Delta x, t)\sin\theta(x+\Delta x, t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) + F(x)\Delta x = \rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Bagi kedua ruas dengan Δx maka diperoleh

$$\frac{T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t)}{\Delta x} + F(x) = \rho(x)\sqrt{1+\frac{\Delta u^2}{\Delta x^2}}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Akibatnya untuk $\Delta x \to 0$ berlaku

$$\begin{aligned}\rho(x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial T(x,t)\sin\theta(x,t)}{\partial x} + F(x)\\ &= T_x(x,t)\sin\theta(x,t) + T(x,t)\cos\theta(x,t)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} + F(x). \qquad (1)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pada Persamaan 1 masih terdapat variabel θ. Jadi, selanjutnya akan dicari pendekatan nilai θ dalam u.

Hukum Newton II - III

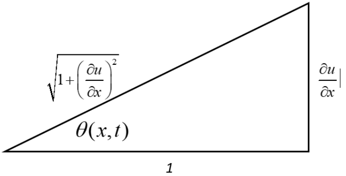
Perhatikan kembali Gambar 1. Untuk Δx sangat kecil, berlaku

$$\tan\theta(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga turunan kedua u terhadap x adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(1 + tan^2\theta(x,t)\right) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}$$

akibatnya menurut Teorema Phytagoras diperoleh nilai sin θ dan cos θ sebagai berikut :



Hukum Newton II - IV

$$\sin\theta(x,t) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}, \quad \cos\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$$

Di awal diasumsikan bahwa amplitudo gelombang sangat kecil, sehingga $|u_x| << 1$. Akibatnya dengan menggunakan pendekatan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$$

diperoleh

$$\sin\theta(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos\theta(x,t) = 1, \quad \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Substitusikan ke Persamaan 1 maka diperoleh persamaan pada arah vertikal adalah

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_x(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + T(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x). \tag{2}$$

Selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama, pada arah horisontal berlaku

$$T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\theta(x,t) = 0. \tag{3}$$

Bagi kedua ruas dengan Δx dan untuk $\Delta x \to 0$ maka Persamaan 3 menjadi

$$\frac{\partial T(x,t)\cos\theta(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$T_x(x,t)\cos\theta(x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai $\cos\theta, \sin\theta$ dan $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ yang telah diperoleh sebelumnya, maka didapatkan

$$T_x(x,t) - T(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Misalkan bentuk nonlinear didekati dengan nol, maka diperoleh persamaan untuk arah horisontal

$$T_x(x,t) = 0. \tag{6}$$

Dengan menggabungkan persamaan bertikal dan horisontal, persamaan untuk gelombang transfersal dengan amplitudo sangat kecil yang didapatkan adalah

$$\rho(x)\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x)$$

Pada kasus dimana tidak ada gaya eksternal yang bekerja, $F(x) = 0$, densitas dan tegangan tali bernilai konstan, dimisalkan $c^2 = \frac{T}{\rho}$, maka **Persamaan Gelombang 1D** yang terbentuk adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Pada bagian ini akan dicari solusi umum persamaan gelombang dengan menggunakan transformasi koordinat sehingga diperoleh bentuk kanonik dari persamaan.
Dimisalkan $A = 1, B = 0$ dan $C = -c^2$ dengan $c > 0$, maka diskriminan dari persamaan gelombang adalah

$$D = B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(-c^2) = 4c^2 > 0.$$

Jadi, persamaan gelombang merupakan persamaan hiperbolik. Persamaan kuadrat yang bersesuaian dengan persamaan tersebut adalah

$$\lambda^2 - c^2 = 0.$$

Darisini diperoleh akar-akar persamaan kuadratnya adalah $\lambda_1 = c$ dan $\lambda_2 = -c$.

Solusi Umum Persamaan Gelombang - II

Akibatnya, persamaan karakteristik yang terbentuk adalah

$$\frac{dx}{dt} = -c \quad \text{dan} \quad \frac{dx}{dt} = c,$$

dengan solusi karakteristiknya adalah

$$x + ct = c_1 \quad \text{dan} \quad x - ct = c_2.$$

Dipilih $\xi = x + ct$ dan $\eta = x - ct$. Dengan pemilihan ini diketahui bahwa

$$\begin{aligned} \xi_x &= 1 & \xi_t &= c \\ \eta_x &= 1 & \eta_t &= -c \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad \text{dan} \quad u_t & &= u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t \\ &= u_\xi + u_\eta & &= c u_\xi - c u_\eta \end{aligned}$$

Turunan keduanya yaitu

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \\
&= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\
u_{tt} &= c(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t) - c(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t) \\
&= c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}
\end{aligned}
$$

Substitusikan pada PD diperoleh

$$
\begin{aligned}
c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta} - c^2 \left(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) &= 0 \\
-4c^2 u_{\xi\eta} &= 0 \\
u_{\xi\eta} &= 0. \\
u_{\xi} &= F(\xi)
\end{aligned}
$$

Jadi, solusinya adalah

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

atau

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

The End