Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Panas

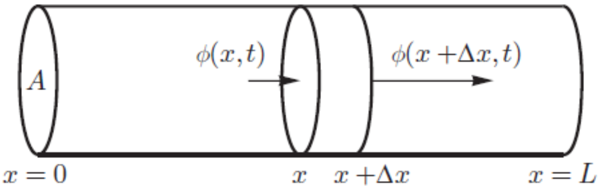
Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

Penurunan Persamaan Pans

Akan diturunkan persamaan panas 1D pada sebuah batang logam yang mempunyai luas penampang yang sama A pada arah sumbu-x (misalkan dari $x = 0$ sampai $x = L$) seperti diilustrasikan pada Gambar 2.



Dimisalkan
$e(x,t)$ = densitas energi panas pada posisi x saat t.
$\phi(x,t)$ = flux panas atau banyaknya energi panas yang mengalir dari kiri ke kanan per satuan waktu per luas penampang.
$Q(x,t)$ = energi panas yang dibangkitkan per satuan volume per satuan waktu.

Dengan menggunakan variabel yang telah didefinisikan maka

1. Total energi panas sepanjang Δx adalah
$$e(x,t)A\Delta x$$
2. Energi panas yang mengalir di titik x saat t adalah
$$\phi(x,t)A$$
3. Energi panas yang dibangkitkan sepanjang Δx adalah
$$Q(x,t)A\Delta x$$

Penurunan Persamaan Panas II

Di bagian partisi kecil Δx berlaku hukum kekekalan energi yaitu

Hukum kekekalan energi

Laju perubahan energi panas = banyaknya energi panas yang mengalir + banyaknya energi panas yang dibangkitkan.

Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{\partial e(x,t)A\Delta x}{\partial t} = \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x.$$

Bagi kedua ruas dengan $A\Delta x$

$$e_t(x,t) = \frac{\phi(x,t) - \phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} + Q(x,t).$$

Untuk $\Delta x \to 0$ berlaku

$$e_t(x,t) = -\phi_x(x,t) + Q(x,t).$$

Variabel yang biasa digunakan untuk menyatakan perpindahan panas adalah besaran suhu, $u(x,t)$. Oleh karena itu, variabel e_t, ϕ dan Q akan dinyatakan dalam u.
Misalkan
$c(x) =$ kapasitas panas di posisi x, energy panas yang dibutuhkan untuk meningkatkan suhu satu derajat per satuan massa
$\rho(x) =$ massa jenis logam di posisi x, massa per satuan volume
maka

$$e(x,t) = c(x) \cdot u(x,t) \cdot \rho(x)$$

Selanjutnya untuk menyatakan ϕ dalam u digunakan aturan Fourier sebagai berikut :

1. Jika terdapat perbedaan suhu maka energi panas akan mengalir dari dari yang lebih panas ke daerah yang lebih tinggi.
2. Semakin besar perbedaan suhunya maka semakin besar pula aliran energi panasnya.

Penurunan Persamaan Panas IV

3. Aliran energi panas bervariasi tergantung bahan materialnya, meskipun perbedaan suhunya sama.

Dari aturan ini kemudian diperoleh hubungan

$$\phi(x) = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Substitusikan pada persamaan, jika tidak ada energi yang dibangkitkan pada aliran panas maka $Q = 0$, sehingga diperoleh

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = K_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

atau

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

dengan $k = \frac{K_0}{c\rho}$.

The End