Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Laplace

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

Overview

1. Penurunan Model Persamaan Panas 2D
2. Penurunan Persamaan Laplace

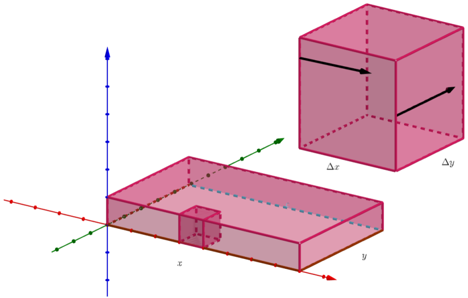
Permasalahan I

Pada materi ini, akan dijelaskan penurunan persamaan Laplace yang diperoleh dari persamaan panas 2D. Jadi, domain yang kita bicarakan disini adalah batang logam dua dimensi homogen, kepadatannya konstan ρ. Ketinggian batang logam seragam, L dan diisolasi secara lateral sehingga tidak ada aliran panas keluar atau masuk dari penampang terluar

$$\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Akan dicari bagaimana model perubahan suhu yang terjadi pada batang logam tersebut. Misalkan $u(x, y, t)$ merupakan suhu batang logam di titik (x, y) pada saat t, maka akan dicari model yang mewakili $u(x, y, t)$.

Permasalahan II



Gambar 1: Ilustrasi batang logam pada bangun ruang

Permasalahan III

Tanpa mengurangi sifat keumuman, misalkan batang logam yang kita perhatikan memiliki panjang a dan lebar b sehingga

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Untuk dapat memperoleh model, akan diidentifikasi dari perubahan energi panas yang terjadi pada block kecil batang logam tersebut.

Asumsi dan Variabel I

Misalkan

- $\phi_1(x, y, t)$ adalah flux energi panas atau banyaknya energi panas yang mengalir pada arah x per satuan waktu per volume. Sementara , $\phi_2(x, y, t)$,adalah flux energi panas atau banyaknya energi panas yang mengalir pada arah y per satuan waktu per volume. Selanjutnya untuk menyatakan ϕ dalam u digunakan aturan Fourier yang berlaku pada transfer panas sebagai berikut :
  1. Jika terdapat perbedaan suhu maka energi panas akan mengalir dari dari yang lebih panas ke daerah yang lebih tinggi.
  2. Semakin besar perbedaan suhunya maka semakin besar pula aliran energi panasnya.
  3. Aliran energi panas bervariasi tergantung bahan materialnya, meskipun perbedaan suhunya sama.

Asumsi dan Variabel II

Dari ketiga aturan Fourier tersebut diperoleh

$$\phi_1 = -K_o \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \phi_2 = -K_o \frac{\partial u}{\partial y}$$

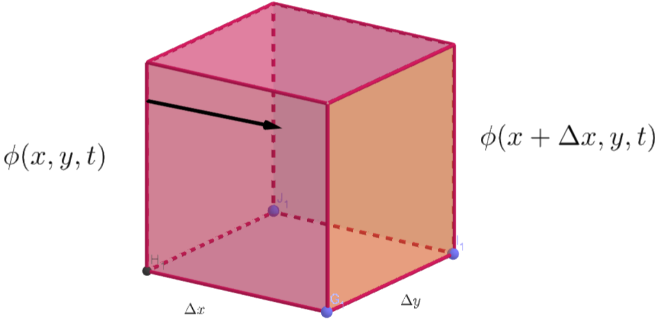
dengan k adalah konstanta proporsionalitas.

- $e(x, y, t)$ adalah besarnya energi panas per satuan volume atau besarnya energi yang dibutuhkan untuk menaikkan energi dari 0^0 menjadi $u(x, y, t)$. Misalkan c adalah besarnya energi untuk menaikkan satu derajat per satuan massa, ρ adalah banyaknya massa per satuan volume (kepadatan) maka diperoleh bahwa

$$e(x, y, t) = c\rho u(x, y, t)$$

Penurunan Model I

Pada arah sumbu-x perubahan energi panas yang terjadi yaitu.



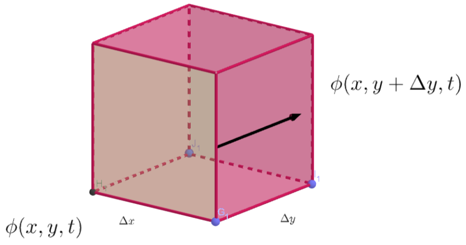
Penurunan Model II

Panas masuk dari sebelah kiri ke kanan. Besar panas yang mengalir pada titik x sepanjang Δy adalah $\phi(x, y, t)$ dikalikan dengan luas penampangnya, sementara besar panas yang mengalir ke pada titik $x + \Delta x$ sepanjang Δy adalah $\phi(x + \Delta x, y, t)$ dikalikan dengan luas penampangnya. Akibatnya

$$\phi_1(x, y, t)\Delta yL - \phi_1(x + \Delta x, y, t)\Delta yL.$$

Penurunan Model

Pada arah sumbu-y perubahan energi yang terjadi yaitu



panas masuk dari penampang bagian depan dan keluar dari penampang bagian belakang dengan jarak penampang Δy. Perubahan energi panas yang terjadi yaitu

$$\phi_2(x, y, t)\Delta xL - \phi_2(x, y + \Delta y, t)\Delta xL$$

Hukum Kekekalan Energi I

Theorem (Hukum Kekekalan Energi)

Laju perubahan energi panas = banyaknya energi panas yang mengalir + banyaknya energi panas yang dibangkitkan.

Diasumsikan tidak ada energi panas yang dibangkitkan.

$$\begin{aligned}\frac{\partial e(x,y,t)\Delta x\Delta yL}{\partial t} &= \phi_1(x,y,t)\Delta yL - \phi_1(x+\Delta x,y,t)\Delta yL \\ &\quad + \phi_2(x,y,t)\Delta xL - \phi_2(x,y+\Delta y,t)\Delta xL.\end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan $\Delta x\Delta yL$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial e(x,y,t)}{\partial t} &= \frac{\phi_1(x,y,t) - \phi_1(x+\Delta x,y,t)}{\Delta x} \\ &\quad + \frac{\phi_2(x,y,t) - \phi_2(x,y+\Delta y,t)}{\Delta y}\end{aligned}$$

Hukum Kekekalan Energi II

Untuk $\Delta x \to 0$ dan $\Delta y \to 0$ maka persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{\partial e(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_1(x,y,t)}{\partial x} - \frac{\partial \phi_2(x,y,t)}{\partial y}.$$

Substitusikan informasi sebelumnya maka akan diperoleh

$$c\rho \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = K_0 \left[\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right].$$

Persamaan panas 2D yang diperoleh adalah

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = k \left[\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right],$$

dengan $k = \frac{K_0}{c\rho}$

Persamaan Laplace

Jika suhu batas terluar batang logam tidak berubah terhadap waktu maka akan dimungkinkan terjadi kondisi steady state yaitu kondisi dimana suhu tidak berubah terhadap waktu. Akibatnya kondisi steady state terjadi jika

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = 0.$$

Persamaan panas pada saat kondisi steady state ini disebut dengan persamaan Laplace. Jadi, bentuk persamaan laplace dua dimensi adalah

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} = 0$$

atau dapat ditulis sederhana

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

The End