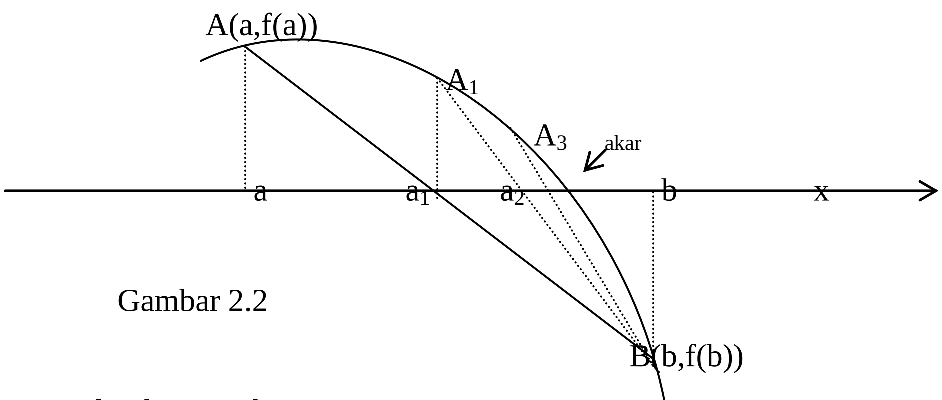
2. Metode Posisi Palsu

Seperti halnya metode Bagi Dua, metode Posisi Palsu mensyaratkan diketahuinya interval letak akar yaitu (a,b). Hampiran akar persamaan memanfaatkan perpotongan garis yang melalui titik (a,f(a)) dan (b,f(b)) dengan sumbu x. Cara ini akan lebih cepat memperoleh hasil yang mendekati akar yang sebenarnya apabila posisi akar terletak dekat dengan ujung interval seperti apada gambar berikut.

Pengujian letak akar tetap diperlukan untuk perhitungan berikutnya.



Gambar 2.2

Perhatikan gambar.

Garis AB memotong sumbu x di titik a_1. Garis A_1B memotong sumbu x di a_2. Garis A_3B memotong di a_4 dst.

Persamaan garis AB adalah:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Titik potong garis dengan sumbu x adalah : $x_0 = a - f(a) \dfrac{b - a}{f(b) - f(a)}$

Penghentian perhitungan dilakukan apabila titik ptong sudah dekat dengan akar sebenanrya yang dutandai dengan jarak anatara dua hasil uterasi berurutan sangat dekat memenuhi toleransi yang diberikan..

Algoritma Metode Posisi Palsu.

Input.: f(x), a , b , tol

Output: akar

Proses:

1) x0lama = b-a (untuk tbakan awal saja)

2) $x_0 = b - f(b) \dfrac{b - a}{f(b) - f(a)}$

3) Jika abs(x_0 - x0lama) < tol maka akar = x_0. Selesai

4) Jika f(a) . f(x_0) < 0 maka b = x_0, jika tidak a = x_0

5) x0lama = x_0, kembali ke langkah 2).

3. Metode Iterasi Titik Tetap.

Sebuah nilai x merupakan solusi dari persamaan f(x) = 0 jika ruas kiri sama dengan ruas kanan. Prinsip ini yang dipakai metode Iterasi titik tetap untuk mencari pendekatan akar.

Persamaan f(x) = 0 diubah menjadi persamaan x = g(x). Akan dicari nilai x = x0 sedemikian hingga x0 = g(x0). Hal ini ditempun dengan memandang g(x0) sebagai x1, g(x1) sebagai x2 … dst sehingga beda antara x_i dan x_{i+1} memenuhi toleransi yang ditetapkan. Namun metode ini tidak menjamin akan mendapatkan hasil yang diharapkan. Kekonvergenan barisan x0, x1, x2, ……… sangat dipengaruhi oleh pilihan awal dari nilai xo.

Contoh.

Lakukan proses iterasi untuk menentukan pendekatan akar persamaan $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$

Secara aljabar akar persamaan tsb dapat dihitung menggunakan rumus abc yang hasilnya adalah $x_1 = 2.618\,0$ dan $x_2 = 0.3819$

Penyelesaian.

Persamaan $x^2 - 3x + 1 = 0$ dapat ditulis sbb:

$x = g(x) = (x^2 + 1)/3.$

Rumus iterasinya adalah $x_{i+1} = (x_i^2 + 1)/3$

Pilih tebakan awal, misalnya $\mathbf{x_0 = 1}$, maka

i = 0, $x_1 = (xo^2 + 1)/3 = 0.667$

i = 1, $x_2 = (0.667^2 + 1)/3 = 0.481$

i = 2, $x_3 = (0.482^2 + 1)/3 = 0..411$

……………………………………………..

Nampaknya barisan x_i akan konvergen menuju ke akar yang terkecil yaitu 0.3819.

Pilih tebakan awal, misalnya $\mathbf{x_0 = 3}$, maka

i = 0, $x_1 = (3^2 + 1)/3 = 3.333$

i = 1, $x_2 = (3.333^2 + 1)/3 = 4.037$

i = 2, x_3 = $(4.037^2 + 1)/3$ = 11.415

……………………………………………..

Nampaknya barisan x_i tidak konvergen menuju ke salah satu akar. Tebakan awal **x_0 = 3 mengakibatkan barisan x_i divergen.**

Rumus iterasi dari persamaan di atas dapat juga ditulis: $x_{i+1} = 3 - 1/x_i$

Dengan tebakan awal $x_0 = 1$, diperoleh hasil sbb:

i = 0, $x_1 = 3 - 1/1 = 2.000$

i = 1, $x_2 = 3 - ½ = 2.500$

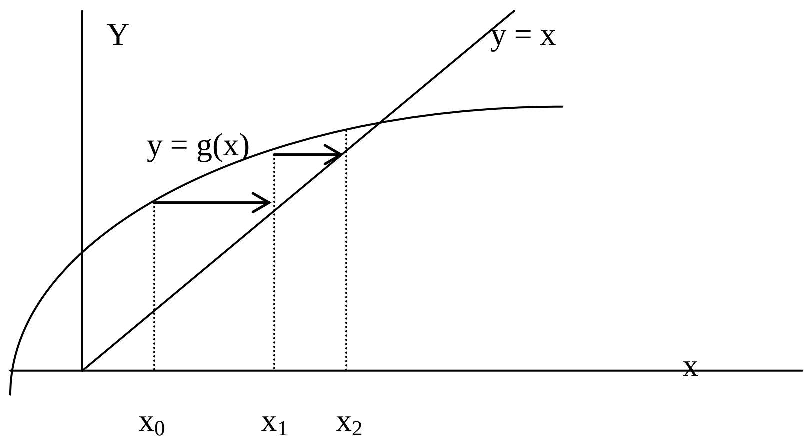
i = 2, $x_3 = 3 - 1/(2.5) = 2.600$

i = 3, $x_4 = 3 - 1/(2.6) = 2.615$.

Barisan x_i nampaknya konvergen ke 2.618.

Coba pilihan tebakan awal yang lain dan bagaimana hasilnya?

Secar grafik kemungkinan pilihan tebakan awal dan fungsi g(x) dapat dilihat pada gambar berikut.

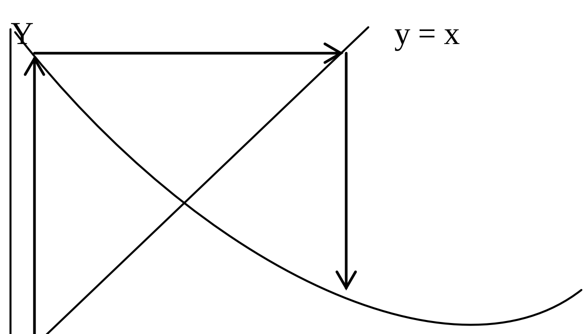


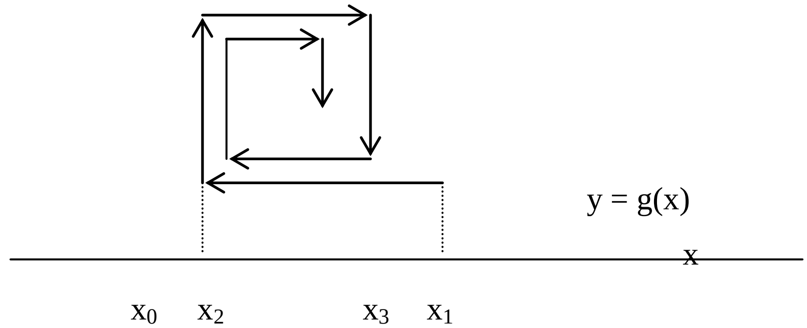
$0 < g'(x_0) < 1$

Gambar 2.3

Akar persamaan merupakan titik potong antara y = x dan y = g(x).

Tebakan awal x_0 memberikan $g(x_0) = x_1$. Dari x_0 ke x_1 arah perpindahan ke kanan menuju ke perotongan antara y = x dan y = g(x). Ini menunjukkan bahwa barisan yang terjadi adalah konvergen. Dalam hal ini kemiringan dari y = g(x) di titik x_0 antara 0 dan 1.

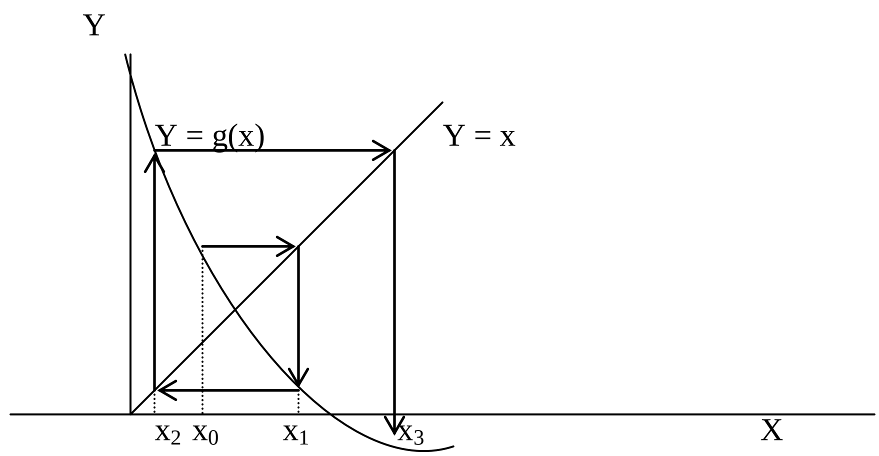




$-1 < g'(x_0) < 0$

Gambar 2.4

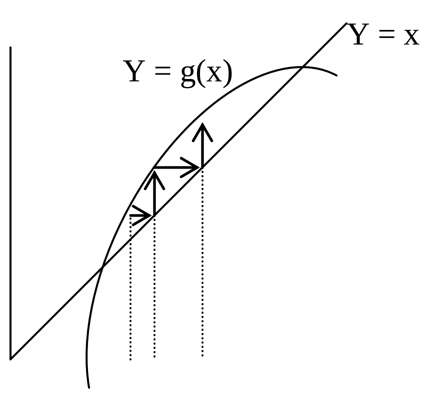
Mulai dari x_0, anak panah menunjukkan gerakan yang makin lama mendekati titik potong antara $y = x$ dan $y = g(x)$. Ini berarti barisan x_i konvergen ke akar persamaan yang dicari.

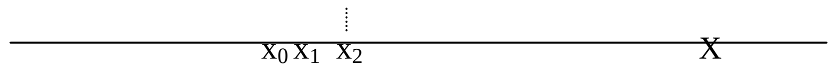


$g'(x_0) < -1$

Gambar 2.5

Pada gambar jelas bahwa anak panak yang menunjukkan hasil iterasi semakin menjauh dari titikpotong antara $y = x$ dan $y = g(x)$. Hal ini menyatakan barisan yang dihasilkan oleh iterasi adalah divergen. Perhatikan gradien garis singgung di titik tabakan awal $g'(x_0) < -1$.





$g'(x_0) > 1$

Gambar 2.6

Seperti pada kasus sebelumnya, gerak panah semakin jauh dari titik potong antara $y = x$ dan $y = g(x)$. Dalam hal ini $g'(x_0) > 1$, dan barisan hasil iterasi divergen.