Teori
Peluang Diskrit

Peluang Diskrit

Apa yang terjadi jika keluaran dari suatu eksperimen tidak memiliki peluang yang sama?

Dalam kasus ini, peluang $p(s)$ dipadankan dengan setiap keluaran $s \in S$, di mana S adalah ruang sampel, yang memenuhi dua syarat:

(1) $0 \leq p(s) \leq 1$ untuk setiap $s \in S$, dan

(2) $\sum_{s \in S} p(s) = 1$

Artinya, bahwa

(1) setiap peluang bernilai antara 0 dan 1, dan

(2) jika peluang dari semua keluaran yang mungkin dijumlahkan akan sama dengan 1, karena pada saat eksperimen dilakukan, satu dari keluaran tersebut dijamin akan terjadi.

Fungsi $p: S \rightarrow [0,1]$ dinamakan distribusi peluang.

Bagaimana peluang p(s) diperoleh?

Peluang p(s) dari suatu kejadian s sama dengan

$$\lim_{\text{banyaknya eksperimen} \to \infty} \frac{\text{jumlah kemunculan } s}{\text{banyaknya eksperimen}}$$

Setelah kita mengetahui p(s) untuk setiap s, peluang dari suatu kejadian E dapat dihitung sebagai berikut.

$$p(E) = \sum_{s \in E} p(s)$$

Contoh

Suatu dadu dimodifikasi sehingga angka tiga muncul dua kali lebih sering dari angka-angka lainnya.

(a) Berapakah peluang dari semua keluaran yang mungkin?

(b) Berapakah peluang bahwa angka ganjil akan muncul ketika dadu tersebut digulingkan?

Solusi.

(a) Terdapat 6 kemungkinan keluaran s_1, …, s_6.

$p(s_1) = p(s_2) = p(s_4) = p(s_5) = p(s_6)$

$p(s_3) = 2p(s_1)$

Karena jumlah semua peluang tersebut haruslah sama dengan 1, maka $5p(s_1) + 2p(s_1) = 1$ dan

$$7p(s_1) = 1$$

Jadi, $p(s_1) = p(s_2) = p(s_4) = p(s_5) = p(s_6) = 1/7$,

$p(s_3) = 2/7$

(b) $E_{ganjil} = \{s_1, s_3, s_5\}$

Ingat rumus $p(E) = \sum_{s \in E} p(s)$.

Maka,

$$p(E_{ganjil}) = \sum_{s \in E_{ganjil}} p(s) = p(s_1) + p(s_3) + p(s_5)$$

$$= 1/7 + 2/7 + 1/7$$

$$= 4/7$$

Peubah Acak Diskret

- **Definisi 4.1.1. Peubah Acak Diskret**
- Peubah acak disebut diskret, jika ruang contoh S dari peubah acak itu tercacah (berkorespondensi 1-ke-1 dengan himpunan bilangan bulat positif).
- Dengan demikian, jika peubah acak diskret, maka banyaknya nilai dari peubah acak yang bersifat dapat dicacah (1 atau lebih).

Contoh

- Tiga kelereng diambil secara acak dari sebuah kantung yang berisi 3 kelereng putih, 3 kelereng merah, dan 5 kelereng hitam. Misalkan bahwa kita akan memperoleh \$1 untuk setiap kelereng putih yang terambil dan kehilangan \$1 untuk setiap kelereng merah yang terambil. Tentukan peluang kita menang.
- Penyelesaian :
- Misalkan kita defenisikan sebagai total uang yang kita peroleh dari percobaan ini, maka adalah suatu peubah acak yang mengambil nilai 0,±1, ±2, ±3 dengan peluang masing- masing.

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{2}+\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{55}{165}$$

$$P(X=1)=P(X=-1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{39}{165}$$

$$P(X=2)=P(X=-2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{15}{165}$$

$$P(X=3)=P(X=-3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}}=\frac{1}{165}$$

- Untuk memahami bagaimana peluang–peluang di atas di peroleh, perhatikan bahwa, misalnya, jika maka semua kelereng yang terambil berwarna hitam atau masing-masing 1 kelereng dari setiap warna. Begitu juga untuk kejadian terjadi jika yang terambil 1 putih dan 2 hitam atau 2 putih dan 1 merah. Sekedar untuk pengecekan, perhatikan bahwa

$$\sum_{x=0}^{3} P(X=x) + \sum_{x=1}^{3} P(X=-x) = \frac{55+39+15+1+39+15+1}{165} = 1$$

Peluang menang

$$\sum_{x=1}^{3} P(X=x) = \frac{55}{165} = \frac{1}{3}$$

Fungsi Peluang Diskrit

- **Definisi 4.2.1. Fungsi Massa Peluang**
- adalah peubah acak diskret yang masing masing mempunyai peluang , maka Fungsi massa peluang dari adalah hubungan antara nilai peubah acak dengan peluangnya.

Contoh

- Tiga buah mata uang dilemparkan satu kali. Peubah acak menyatakan banyaknya Angka yang keluar, tentukan fungsi massa peluangnya

$$P\{X = x\} = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{untuk} \quad x = \quad 0, 3 \\ \frac{3}{8} & \text{untuk} \quad x = \quad 1, 2 \\ 0 & \text{untuk} \quad x = \quad \text{selainnya} \end{cases}$$

Contoh

- Sebuah kotak berisi 3 kelereng merah dan 2 kelereng putih. Diambil 3 kelereng dari kotak tersebut. Peubah acak menyatakan banyaknya kelereng merah yang terambil. Tentukan fungsi massa peluangnya.
- Penyelesaian :
- Dengan diambilnya tiga kelereng dari kotak tersebut, maka paling sedikit ada 1 kelereng yang berwarna merah karena kelereng putih hanya berjumlah dua. Dengan demikian fungsi massa peluangnya adalah sebagai berikut :

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}$$

Sebaran Peluang Diskrit Kumulatif

Fungsi sebaran peluang kumulatif (f.s.k), atau lebih ringkasnya disebut fungsi sebaran F bagi peubah acak X didefinisikan sebagai

$$F(b) = P(X \leq b)$$

Sifat-sifat fungsi sebaran F adalah :

1. F adalah fungsi takturun (*nondecreasing function*), artinya jika $a < b$, maka $F(a) \leq F(b)$
2. $\lim_{b \to \infty} F(b) = 1$
3. $\lim_{b \to -\infty} F(b) = 0$
4. $F(b)$ kontinu kanan, artinya $\lim_{b \to b_0} F(b) = F(b_0)$

Bukti

Sifat 1 merupakan akibat dari kenyataan bahwa jika $a < b$, maka kejadian $\{X \le a\}$ tercakup di dalam kejadian $\{X \le b\}$, sehingga tidak mungkin mempunyai peluang yang lebih besar. Sifat- sifat 2 , 3 , dan 4 semuanya merupakan akibat dari sifat kekontinuan peluang. Sebagai misal, untuk membuktikan sifat 2, perhatikan bahwa jika $b_{n\to\infty}$, maka kejadian-kejadian $\{X \le b_n\}$ konvorgen ke kejadian $\{X < \infty\}$ (artinya, jika $b_{n\to\infty}$ maka $\lim \{X \le b_n\} = \{X < \infty\}$). Oleh karenanya, berdasarkan sifat kekontinuan peluang, kita peroleh

$$\lim_{b_{n\to\infty}} P(X \le b_n) = P\left(\lim_{b_{n\to\infty}} \{X \le b_n\}\right) = P(X < \infty) = P(S) = 1$$

Segala macam pertanyaan peluang tentang X dapat dijawab berdasarkan f.s.k F. Sebagai misal,

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad \text{untuk semua} \qquad a < b$$

Hal ini paling mudah terlihat bila kejadian $\{X \leq b\}$ diucapkan sebagai gabungan kejadian-kejadian $X \leq a$ dan $\{a < X \leq b\}$ yang saling menyisihkan. Dengan kata lain,

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$$

Sehingga $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$

Jika kita ingin menghitung peluang bahwa X lebih kecil daripada b, kita juga dapat menerapkan sifat kekontinuan untuk memperoleh

$$P\{X \leq b\} = P\left(\lim_{n\to\infty}\left\{X \leq b - \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \leq b - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right)$$

Perhatikan bahwa $P\{X < b\}$ tidak selalu sama dengan $F(b)$, karena $F(b)$ juga mencakup peluang bahwa X sama dengan b.

Jika $F_X(x)$ adalah fungsi sebaran (kumulatif) suatu peubah acak diskrit, maka berlaku:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$, untuk $-\infty < x < \infty$
2. $F_X(x)$ merupakan fungsi tak-turun (tidak pernah turun)
3. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ dan $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
4. $F_X(x)$ merupakan fungsi tangga (step function) dan loncatan (jump) pada setiap step x adalah nilai peluang X pada titik tersebut, $f_X(x) = P(X = x)$

Contoh

Pada ilustrasi pelemparan 3 koin, maka $P(Y = y) = f_Y(y)$ dan $F_Y(y)$ dapat ditulis :

$$P(Y = y) = \begin{cases} 1/8, & y = 0, 3 \\ 3/8, & y = 1, 2 \\ 0, & y \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1/8, & 0 \le y < 1 \\ 4/8, & 1 \le y < 2 \\ 7/8, & 2 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$

Contoh

, (c)

- Misalkan di ketahui fungsi sebaran peubah acak sebagai berikut :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk} \quad x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{untuk} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{untuk} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{12} & \text{untuk} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{untuk} \quad 3 \le x \end{cases}$$

Tentukan

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X < 3)$$

$$P(2 < X \le 4)$$

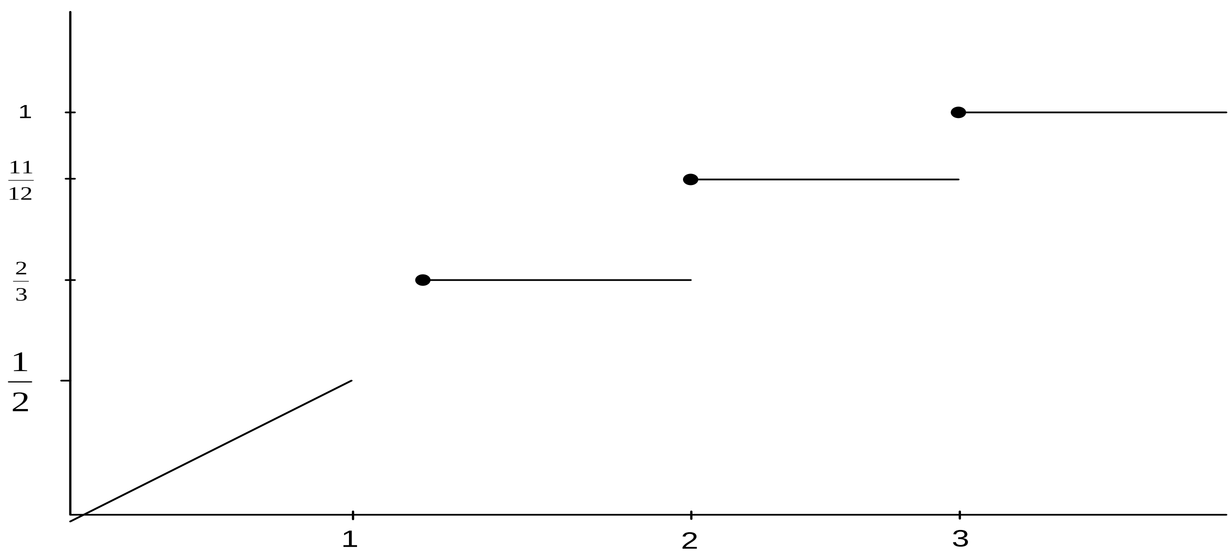
$$P(X = 1)$$

$$P(X<3)=\lim_{n\to\infty}P\left(X\le 3-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}F\left(3-\frac{1}{n}\right)=\frac{11}{12}$$

$$P(X=1)=P(X\le 1)-P(X<1)=F(1)-\lim_{n\to\infty}F\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=1-P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

$$P(2<X\le 4)=F(4)-F(2)=\frac{1}{12}$$



Percobaan Bernoulli

Misalkan suatu eksperimen hanya memiliki dua keluaran yang mungkin.

Contoh. pelemparan sebuah koin.

Setiap pelaksanaan suatu eksperimen yang demikian disebut percobaan Bernoulli.

Secara umum, kedua keluaran yang mungkin tadi disebut kesukses**an** atau kegagal**an**.

Jika p adalah peluang sukses dan q peluang gagal, jelas

$$p + q = 1.$$

Percobaan Bernoulli (2)

Sering kali kita ingin tahu peluang terjadinya **tepat k sukses** ketika suatu eksperimen terdiri dari **n percobaan Berboulli yang saling bebas**.

Contoh.

Suatu koin dimodifikasi sehingga peluang muncul muka adalah 2/3. Apakah peluang dari tepat empat kepala muncul ketika suatu koin dilemparkan sebanyak tujuh kali?

Solusi

Terdapat 2^7 = 128 keluaran yang mungkin.

Jumlah kemungkinan kemunculan empat muka di antara tujuh pelemparan adalah C(7, 4).

Karena ketujuh pelemparan tersebut saling bebas, maka peluang untuk masing-masing dari keluaran tadi adalah $(2/3)^4(1/3)^3$.

Akibatnya, peluang kemunculan tepat empat muka adalah

$$C(7, 4)(2/3)^4(1/3)^3 = 560/2187$$

Teorema Bernoulli

Peluang k sukses dalam n percobaan Bernoulli yang saling bebas, dengan peluang sukses p dan peluang gagal q = 1 – p, adalah

$$C(n, k)\, p^k q^{n-k}.$$

Ini dinotasikan dengan $b(k; n, p)$.

Jika b dipandang sebagai fungsi dari k, maka b dikatakan sebagai distribusi binomial.

Ilustrasi dari bukti Teorema

Misalkan 'S': sukses dan 'F': gagal, dengan peluang sukses p dan peluang gagal q = 1 – p.

Berapakah peluang dari dua sukses dalam lima percobaan Bernoulli yang saling bebas?

Lihat salah satu barisan keluaran yang mungkin:

SSFFF

Berapakah peluang kita akan membangun barisan ini?

Ilustrasi dari bukti Teorema (2)

Barisan: S S F F F

Peluang: $p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q = p^2q^3$

Suatu barisan lain yang mungkin:

Barisan: F S F S F

Peluang: $q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q = p^2q^3$

Setiap barisan dengan dua sukses dalam dua percobaan terjadi dengan peluang p^2q^3.

Ilustrasi dari bukti Teorema (3)

Sekarang, ada berapa banyak barisan yang mungkin? Dengan kata lain, ada berapa cara untuk memilih dua obyek dari daftar yang berisi lima obyek?

Ada $C(5, 2) = 10$ cara, sehingga terdapat 10 barisan yang mungkin, setiap barisan terjadi dengan peluang p^2q^3.

Maka, peluang salah satu dari barisan tersebut muncul pada saat melakukan lima percobaan Bernoulli adalah $C(5, 2)\, p^2q^3$.

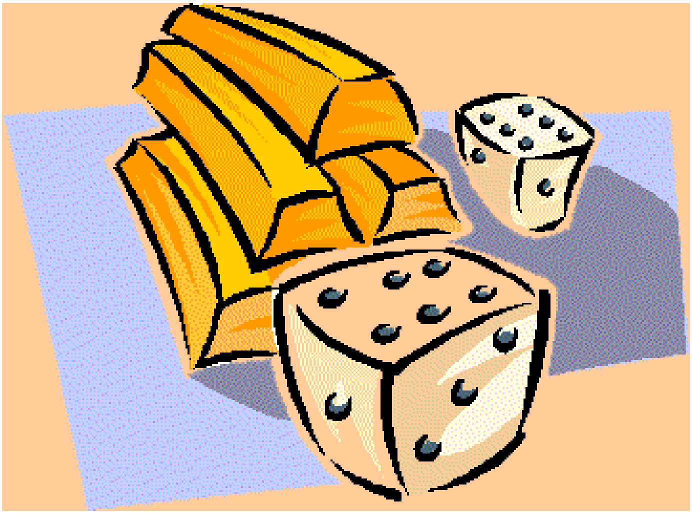
Secara umum, untuk k sukses dalam n percobaan Bernoulli, kita memiliki peluang $C(n,k)\, p^k q^{n-k}$.

Soal

Sebuah dadu dilempar 6 kali berturut-turut. Carilah

(a) p(muncul tepat empat angka 1).

(b) p(tidak ada angka 6 yang muncul).



Solusi

(a) Ini adalah contoh dari suatu barisan dengan enam percobaan Bernoulli yang saling bebas, di mana peluang sukses adalah 1/6 dan peluang gagal 5/6. Karena itu, peluang muncul tepat empat angka 1 pada saat dadu dilemparkan 6 kali adalah

$$C(6,4)\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}008$$

(b) Dalam kasus ini sukses adalah *kemunculan angka selain 6,* yang memiliki peluang 5/6 dan gagal adalah *kemunculan angka 6,* yang peluangnya 1/6.

Maka peluang tidak ada angka 6 yang muncul pada saat dadu dilemparkan 6 kali adalah

$$C(6,6)\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right)^0 \approx 0{,}335$$

Lima uang logam setimbang dilemparkan. Jika hasil-hasil percobaannya diasumsikan bebas, tentukan fungsi massa peluang bagi banyaknya sisi gambar yang muncul.

Penyelesaian: Jika X menyatakan banyaknya sisi gambar ("keberhasilan") yang muncul, maka X adalah suatu peubah acak binom dengan parameter (n =5, $p=\frac{1}{2}$). Oleh karenanya, menurut persamaan (4.4),

$$P\{X=0\} = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$$

$$P\{X=1\} = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{5}{32}$$

$$P\{X=2\} = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{10}{32}$$

$$P\{X=3\} = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{10}{32}$$

$$P\{X=4\} = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{5}{32}$$

$$P\{X=5\} = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{32}$$

Contoh

- Telah diketahui bahwa peluang cacat sekrup-sekrup yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan tertentu ialah 0.01, dan cacatnya sekrup yang satu tidak tergantung (bebas) dari cacatnya sekrup yang lain. Perusahaan ini menjual sekrup- sekrup dalam bungkusan 10 sekrup dan menawarkan jaminan uang kembali bila ada lebih dari 1 sekrup yang cacat dalam setiap bungkusan. Berapa proporsi bungkusan yang terjual yang harus diganti oleh perusahaan ini?
- *Penyelesaian*: Jika *X* adalah banyaknya sekrup cacat didalam satu bungkusan, maka *X* adalah suatu peubah acak binom dengan parameter (10, 0,01). Dengan demikian, peluang suatu bungkusan harus diganti ialah P(X>1)=P(X=2)+……+P(X=10)=1-P(X=0)-P(X=1)

$$1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{0}(0{,}01)^1(0{,}99)^9 \approx 0.007$$

- Jadi, hanya 0.7 persen bungkusan yang harus diganti.

Sifat-sifat fungsi massa peluang suatu peubah acak binom

- *Jika X adalah suatu peubah acak, binom dengan parameter (n,p), dengan maka ketika k naik dari 0 menjadi n, $p\{X=k\}$ mula-mula naik monoton dan kemudian turun monoton, mencapai nilai terbesarnya ketika k sama dengan bilangan bulat terkecil yang lebih kecil atau sama dengan $(n+1)p$.*
- BUKTI: Untuk membuktikan proporsisi ini kita perhatikan dan kita coba menentukan nilai *k* yang membuatnya lebih besar atau lebih kecil dari 1.

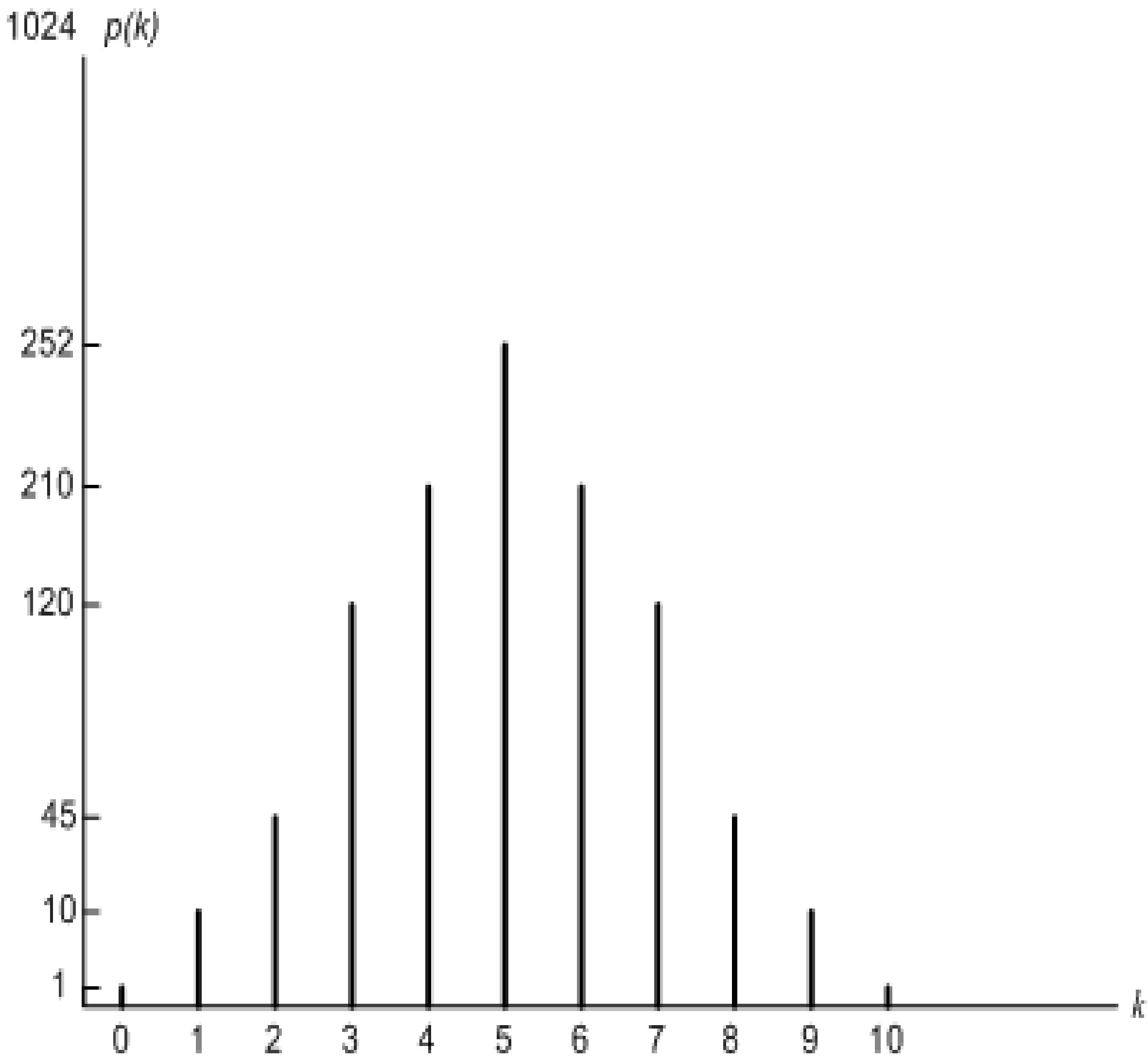
$$\frac{P\{X=k\}}{P\{X=k-1\}} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}}{\dfrac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

Oleh karenanya $P\{X=k\} \geq P\{X=k-1\}$ jika dan hanya jika

$$(n-k+1)p \geq k(1-p)$$

$$k \leq (n+1)p$$

Sebagai ilustrasi mengenai Proporsisi 4.1 perhatikan Gambar 4.3 yaitu grafik fungsi massa peluang suatu peubah acak binom dengan $(10,\frac{1}{2})$.



Peubah Acak Poisson

Suatu peubah *X* yang mengambil nilai-nilai 0,1,2, … dinamakan peubah acak *Poisson* dengan parameter λ jika untuk suatu $\lambda > 0$,

$$P(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

Persamaan (5.1) mendefinisikan suatu fungsi massa peluang sebab

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = \frac{e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} p(i)\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

Sebaran peluang poisson diperkenalkan oleh S.D. Poisson dalam sebuah buku yang ditulisnya tentang penerapan teori peluang di dalam masalah tuntutan hukum, persidangan kriminal, dan sejenisnya. Buku ini yang diterbitkan pada 1837, diberi judul *Recherches sur la probalitè des jugement en matierè criminelle et en matière civile.*

Peubah acak Poisson mempunyai kisaran penerapan yang sangat luas di berbagai bidang sebab ia bisa digunakan suatu hampiran bagi peubah acak dengan parameter *(n,p)* bila *n* besar dan *p* cukup kecil sehingga *np* berukuran sedang. Untuk melihat ini, misalkan *X* adalah suatu peubah acak binom dengan parameter (*n*,*p*) dan misalkan $\lambda = np$.

$$P\{X=i\}=\frac{n!}{(n-i)!\,i!}p^i(1-p)^{n-i}=\frac{n!}{(n-i)!\,i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^i}$$

Sekarang, untuk n yang besar dan λ yang sedang,

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\approx e^{-\lambda}\quad\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i}\approx 1\quad\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^1\approx 1$$

Oleh karenanya untuk n yang besar dan λ yang sedang,

$$P\{X=i\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

Dengan kata lain,jika kita melakukan n tindakan yang bebas,yang masing-masing menghasilkan "keberhasilan" dengan peluang p, maka, untuk n yang besar dan p cukup kecil sehingga np sedang, banyaknya keberhasilan yang terjadi dapat dihampiri oleh suatu peubah acak Poisson dengan parameter $\lambda = np$.

Beberapa teladan peubah acak yang biasanya mematuhi hukum peluang Poisson

- Banyaknya kesalahan cetak di suatu halaman (atau sejumlah halaman) sebuah buku.
- Banyaknya penduduk di suatu masyarakat yang mencapai usia 100 tahun.
- Banyaknya salah sambung tilpun pada suatu hari.
- Banyaknya bungkus makanan nyamikan yang terjual di sebuah toko setiap hari.
- Banyaknya pelanggan yang memasuki kantor pos pada suatu hari.
- Banyaknya patikel yang terpencar selama periode waktu tertentu dari suatu partikel radioaktif.

Contoh

Teladan 4.13
Misalkan banyaknya tipografis pada satu halaman buku ini mengikuti sebaran Poisson dengan parameter $\lambda = \frac{1}{2}$. Hitunglah peluang sedikitnya ada satu kesalahan pada halaman ini.
Penyelesaian: Jika dimisalkan X adalah banyaknya kesalahan di halaman ini, maka

$$P\{X >= 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.395$$

Teladan 4.14
Misalkan bahwa peluang cacat suatu produk yang dihasilkan oleh sebuah mesin ialah 0.1. Hitunglah peluang bahwa suatu contoh 10 produk akan mengandung paling banyak 1 produk yang cacat.
Penyelesaian: Peluang sesungguhnya yang dicari ialah

$$\binom{10}{0}(0.1)^0(0.9)^{10} + \binom{10}{1}(0.1)^1(0.9)^9 = 0.7361$$

Sedangkan jika dilakukan hampiran Poisson diperoleh jawaban

$$e^{-1} + e^{-1} \approx 0.7358$$