METODE NEWTON RAPHSON

Metode Newton-Raphson

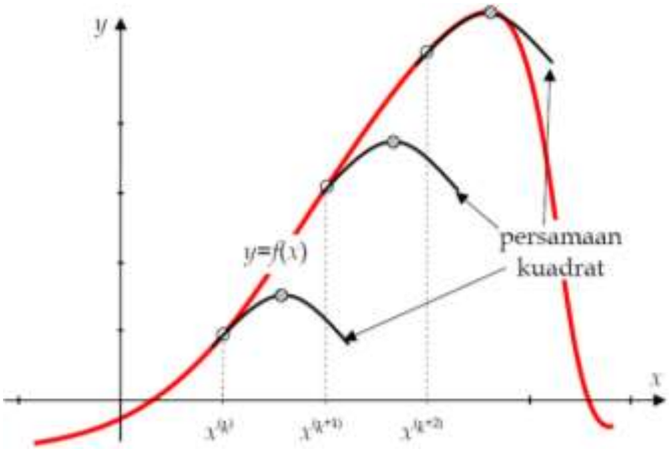
Langkah hitungan yang dilakukan pada metode numeris adalah kebalikan dari metode analitis. Jika pada metode analitis untuk mencari nilai optimum suatu fungsi tujuan dihitung terlebih dahulu titik optimumnya. Setelah diperoleh titik optimum maka nilai optimum fungsi tujuan dapat dihitung. Sedangkan pada metode numeris letak titik optimum ditentukan dengan menyelidiki nilai fungsinya. Titik yang mempunyai nilai fungsi terbesar atau terkecil dibandingkan dengan nilai fungsi pada titik-titik yang lain itulah titik optimumnya. Jadi titik optimunya dihitung terakhir.

Menurut Luknanto (2003), metode numeris dalam optimasi satu variabel—tanpa kendala, dapat dibagi menjadi dua yaitu, teknik eliminasi dan teknik pedekatan. Pada teknik eliminasi dapat dibagi lagi menjadi beberapa teknik yaitu teknik eliminasi pencarian bebas (dengan langkah tetap dan percepatan langkah), teknik eliminasi pencarian lengkap, teknik eliminasi pencarian dikotomi, teknik eliminasi pencarian fibonacci, dan teknik eliminasi rasio emas. Sedangkan pada teknik pendekatan, salah satu teknik pendekatan yang dapat digunakan adalah teknik pendekatan Newton-Raphson (Kuadratik).

Metode Newton-Raphson memerlukan fungsi tujuan tanpa kendala dalam interval yang menjadi perhatian dan mempunyai derivasi pertama maupun keduanya. Untuk memecahkan permasalahan optimasi multivariabel banyak menggunakan metode Newton-Raphson ini. Pada pembahasan ini, metode Newton-Raphson akan diinterpretasikan sebagai pendekan kuadratik dari suatu fungsi tujuan f. Dilihat dari tiga suku pertama dari suatu deret Taylor dari fungsi f pada titik $x^{(k)}$ pada iterasi ke k.

$$F(x) = f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right) + \frac{1}{2} f''\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right)^2 \qquad (1)$$

$F(x)$ menunjukan fungsi pendekatan kuadratik dari $f(x)$ dan mempunyai derivasi pertama dan kedua yang sama di titik $x^{(k)}$. $F(x)$ dapat di maksimisasi secara langsung. Jika titik $x^{(k)}$ berada disekitar titik optimum dari $f(x)$ maka kurva $F(x)$ merupakan pedekatan fungsi $f(x)$ pada titik optimum. Jadi maksimisasi fungsi pendekatan $F(x)$ merupakan pedekatan dari maksimisasi fungsi tujuan yang sebenarnya dari $F(x)$ (lihat Gambar 1).



Gambar 1.

Syarat perlu untuk mencari titik optimum dari persamaan (1) adalah

$$F'^{(x)} = f'^{(x^{(k)})} + f"\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right) = 0$$

atau

$$x^* = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f"(x^{(k)})} \qquad (2)$$

Definisi iterasi Newton-Raphson (Atkinson,1993)

Misalkan fungsi f mempunyai turunan pertama f'. Barisan $x^1, x^2, x^3, \cdots$ yang diperoleh dari iterasi

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \; untuk \; k = 0,1,2, \ldots \qquad (3)$$

disebut barisan iterasi Newton. Fungsi g yang didefinisikan sebagai

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (4)$$

disebut fungsi iterasi Newton-Raphson.

Proses iterasi Newton dihentikan jika perubahan titik optimum telah mencapai ketelitian yang diharapkan atau $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon$.

Contoh soal

Carilah maksimum dari fungsi $f = 720 - \frac{12}{x} - 108x$ mulai dengan $x = 0.25$ dan $\varepsilon = 0.01$.

Penyelesaian :

Derivasi pertama dan kedua dari fungsi tujuan diatas adalah sebagai berikut.

$$f'(x) = \frac{12}{x^2} - 108 \text{ dan } f"(x) = \frac{-24}{x^3}$$

Pada $x^{(1)} = 0.25$, diperoleh $f'\left(x^{(1)}\right) = 84$ dan $f"\left(x^{(1)}\right) = -1536$

Sehingga $F(x) = 576 + 468x - 768x^2$

Untuk mencari titik optimum, syarat perlu yang harus dipenuhi adalah

$$F'(x) = 84 + (-1536)(x^* - 0.25) = 0$$

$$\Leftrightarrow 84 - 1536x^* + 384 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1536x^* = 468$$

$$\Leftrightarrow x^* = 0.305$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh hasil sebagai berikut

k	x^k	$f(x^k)$	$f'(x^k)$	$f"(x^k)$	x^{k+1}	$f(x^{k+1})$	$x^{k+1} - x^k$
1	0.2500	645.0000	84.0000	-1536.0000	-7.4286	1523.9011	-7.6786
2	-7.4286	1523.9011	-107.7825	0.0585	6.7101	-6.4783	14.1387
3	6.7101	-6.4783	-107.7335	-0.0794	6.6500	-0.0001	-0.0601
4	6.6500	-0.0001	-107.7286	-0.0816	6.6500	0.0000	-1.3x10^6

Dilihat dari tabel diatas bahwa pada iterasi ketiga $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| = 0.003 < 0.01$ maka fungsi tersebut optimum pada iterasi keempat dengan nilai $x = 6.65$ dan dengan nilai maksimum yang diperoleh adalah 0.

Karena metode Newton memiliki laju konvergensi kuadratik, sehingga metode ini lebih cepat untuk konvergen menuju ke akar pendekatan dari pada metode lain yang memiliki laju konvergensi linear, ini menjadi keunggulan dari metode Newton-Raphson. Tetapi metode ini tidak selalu konvergen. Dengan menggunakan beberapa iterasi dari teknik eliminasi, sebelum melakukan metode Newton-Raphson, biasanya masalah ketidak-konvergenan dari metode Newton-Raphson dapat dihindari. Kelemahan lain dari metode ini adalah diperlukannya derivasi pertama dan kedua yang secara numeris sangat mahal biayanya dan sangat rumit. Biasanya metode Nowton ini dikombinasikan dengan metode lain untuk mengurangi kelemahannya.

Selain perhitungan manual menggunakan rumus, perncarian akar pendekatan menggunakan metode Newton-Raphson dapat diselesaikan dengan program Maple. Pada dasarnya, algoritma metode Newton-Raphson untuk mencari akar pendekatan suatu fungsi $f(x)$ dimuali dengan menentukan nilai iterasi terlebih dahulu. Dengan menggunakan Maple pada contoh sebelumnya, perhitungan akar pendekatan dapat dilakukan dengan menggunakan perintah sebagai berikut

> $with(Student[Calculus1]):$

> $NewtonsMethod\left(720 - \frac{12}{x} - 108\,x, x = 0.25\right)$

$$6.649958124$$

> $NewtonsMethod\left(720 - \frac{12}{x} - 108\,x, x = 0.25, output = sequence\right)$

$$0.25, -7.428571429, 6.710091821, 6.649959468, 6.649958124$$

> $NewtonsMethod\left(720 - \frac{12}{x} - 108\,x, x = 0.25, output = plot\right)$