DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

8

8.1. Distribusi Seragam

Distribusi seragam merupakan distribusi probabilitas diskrit yang paling sederhana dimana seluruh variabel randomnya diasumsikan memiliki nilai probabilitas yang sama.

Definisi

Jika X variabel random dengan harga-harga $x_1, x_2, \ldots, x_k$ yang mempunyai nilai probabilitas yang sama, maka distribusinya adalah:

$$f(x,k) = \frac{1}{k}, x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

Dimana:

$x =$ peubah acak

$k =$Parameter

Syarat $P(x;k) = \frac{1}{k}$ merupakan fungsi peluang adalah

a) $0 \leq P(x;k) \leq 1$
b) $\sum_{x=x_i}^{x_k} P(x;k) = 1$

Mean (μ)

$$\mu = E(x)$$

$$= \sum_{x=x_i}^{x_k} x_i P(x_{xi};k)$$

$$= \sum_{x=x_i}^{x_k} x_i \cdot \frac{1}{k}\text{ , karena } \frac{1}{k} \text{ merupakan konstanta}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{x=x_i}^{x_k} x_i$$

Variansi (σ^2)

$$\sigma^2 = E((x-\mu)^2)$$

$$= \sum_{x=x_i}^{x_k} (x_i - \mu)^2 P(x_i; k)$$

$$= \sum_{x=x_i}^{x_k} (x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{k}, \qquad \text{karena} \frac{1}{k} \text{merupakan konstanta}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{x=x_i}^{x_k} (x_i - \mu)^2$$

Standar Deviasi (SD)

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{x=x_i}^{x_k} (x_i - \mu)^2}{k}}$$

Contoh Soal:

1) Sebuah dadu ideal memiliki muka : 1,2,3,4,5,6. Jika x menyatakan mata dadu yg muncul, maka $x =$ 1,2,3,4,5,6 dan distribusi probabilitasnya adalah...

   Penyelesaian

   Karena peluang mata dadu yang muncul selalu sama maka akan menggunakan distribusi seragam. Sehingga

$$P(x, 6) = \frac{1}{6}, x = 1,2,3,4,5,6$$

8.2. Distribusi Bernoulli

Distribusi Bernoulli adalah suatu distribusi random yang terdiri dari dua kejadian yang berkomplemen, seperti sukses-gagal, ya tidak, baik cacat, dan sebagainya. Distribusi ini memiliki sifat-sifat:

- Eksperimen terdiri dari n kali pengulangan
- Tiap kali, outcome hanya dua macam, dilabeli “sukses” dan "gagal”
- Probabilitas “sukses” di tiap percobaan, p, besarnya tetap dari satu percobaan ke berikutnya.

- Satu percobaan dan yg berikutnya bersifat independen

Definisi

Misalkan E kejadian sukses dengan peluang p maka E^c kejadian gagal dengan peluang $q = 1 - p$. Jika X suatu variabel random yang nilainya hanyalah 0 dan 1 maka X disebut dengan variabel bernoulli. Distribusi bernoulli dirumuskan:

$$P(x) = p^x q^{1-x}, x = 0,1$$

Di mana:

x = peubah acak

p = Peluang sukses $(0 \leq p \leq 1)$

q = Peluang gagal $(0 \leq q \leq 1)$

$p + q = 1$

Syarat $P(X) = p^x q^{1-x}$ merupakan fungsi peluang adalah

a) $(0 \leq p \leq 1)$
b) $\sum_{x=0}^{1} P(x) = 1$

Mean $(\boldsymbol{\mu})$

$$\begin{aligned}
\mu &= E(x) \\
&= \sum_{x=0}^{1} xP(x) \\
&= \sum_{x=0}^{1} xp^x \cdot q^{1-x} \\
&= 0 + 1.p^1 \cdot q^{1-1} \\
&= p
\end{aligned}$$

Variansi (σ)

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E((x-\mu)^2) = E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) \\
&= \sum_{x=0}^{1} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) - 2\sum_{x=0}^{1} \mu x f(x) + \sum_{x=0}^{1} \mu^2 f(x) \\
&= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 = E(x^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \\
&= E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - E^2(x) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p(x) - p^2 \\
&= \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x \cdot q^{1-x} - p^2 = 0 + 1 \cdot p^1 \cdot q^{1-1} - p^2 \\
&= p(1-p) = p \cdot q
\end{aligned}
$$

Standar Deviasi (SD)

$$SD = \sigma = \sqrt{p \cdot q}$$

FPM dan FPMF pada distribusi bernoulli

$$M_x(t) = q + pe^t$$

$$G_x(t) = q + pt$$

Contoh Soal

1) Dalam suatu kotak terdiri atas 20 buah bola berwarna merah dan 10 buah bola berwarna putih. Akan diambil sebuah bola dari dalam kotak. Misalkan pengambilan akan dikatakan sukses jika bola yang terambil berwarna putih. Akibatnya $q = \frac{2}{3}$.

   Penyelesaian:

   Diketahui bahwa pengambilan dikatakan sukses jika bola putih yang tersambil, sehingga:

$$p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}^0 \frac{2}{3}^1 = \frac{2}{3}, x = 0 \\ \frac{1}{3}^1 \frac{2}{3}^0 = \frac{1}{3}, x = 1 \\ 0, x \text{ lainnya} \end{cases}$$

8.3. Distribusi Binomial

Suatu percobaan yang dilakukan berulang-ulang dapat memiliki dua hasil yang mungkin. Misalnya pelemparan sebuah mata uang berulangulang akan selalu menghasilkan gambar atau angka. Dalam hal ini, kita dapat mengandaikan sukses, jika setiap gambar yang muncul dan gagal untuk setiap angka yang muncul. Contoh lain misalnya, pada fenomena kelahiran. Seseorang dapat mengasumsikan sukses untuk setiap kelahiran bayi perempuan dan gagal untuk kelahiran bayi laki, demikian juga misalnya pada proses produksi lampu pijar. Setiap bola lampu yang diperiksa dapat dikatagorikan rusak (dikirim lagi untuk proses perbaikan) atau baik (dikirim ke proses selanjutnya yaitu ke bagian penjualan). Contoh lain yang agak rumit misalkan pada pengambilan 4 buah kartu pada setumpuk kartu bridge. Sekehendak kita mau menyebutkan kartu hitam sebagai sukses atau gagal. Setiap pengambilan kartu berikutnya setelah kartu sebelumnya dikembalikan bersifat independen, dimana dari satu percobaan ke percobaan lain besar kemungkinan terjadinya sukses bernilai tetap. Percobaan yang memiliki sifat-sifat seperti di atas disebut dengan percobaan binomial.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan beberapa sifat dari percobaan binomial, yaitu antara lain

- Percobaanya terdiri atas n percobaan yang berulang
- Setiap percobaan menghasilkan satu hasil yang dapat dinyatakan sebagai sukses, dan hasil lain sebagai gagal
- Percobaan yang berulang bersifat independen
- Kemungkinan terjadinya sukses, yaitu p, berharga konstan dari satu percobaan ke percobaan lainnya.
- Merupakan proses pengambilan sampel dengan pengembalian

Definisi

Jumlah sukses yang terjadi dalam n percobaan dari eksperimen binomial disebut variabel random binomial

Distribusi probabilitas dari variabel random binomial x disebut distribusi binomial. Distribusi ini tergantung pada jumlah percobaan dan kemungkinan terjadinya sukses dari percobaan tersebut dan dinotasikan sebagai $b(x;\, n;\, p)$. Jika setiap percobaan dari percobaan binomial memilki hasil sukses dengan kemungkinan p dan kemungkinan $q -$

1 untuk gagal, maka distribusi probabilitas dari variabel random binomial x yang menyatakan jumlah sukses yang terjadi dalam n percobaan yang independen adalah:

$$P(x) = b(x; n; p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0,1,2,3, \dots, n$$

Dimana:

p =peluang sukses $(0 \leq p \leq 1)$

q = peluang gagal $(0 \leq q \leq 1)$

x = peubah acak

n = banyaknya percobaan $(n \geq 0)$

$p = q = 1$

Syarat $P(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ merupakan fungsi adalah

a) $(0 \leq p \leq 1)$
b) $\sum_{x=0}^{n} P(x) = 1$

Mean ($\boldsymbol{\mu}$)

Karena distribusi binomial merupakan kumpulan dari distribusi bernoulli yang saling bebas maka rataan dari distribusi binomial juga merupakan jumlahan dari rataan masing-masing peubah acak bernoulli

$$\mu = E(x) = E(I_1) + E(I_2) + \cdots + E(I_n)$$

Karena pada distribusi bernoulli telah diketahui bahwa rataaanya adalah p maka

$$\mu = E(x)$$

$$= P + P + \cdots P, sebanyak\ n$$

$$= np$$

Variansi ($\boldsymbol{\sigma^2}$)

Variansi setiap Ij diberikan oleh:

$$\sigma_{Ij}^2 = \&E[(Ij - P)^2] = \sum[Ij^2 - 2IjP + P^2]$$

$$= \&\sum(Ij^2 - 2IjP + P^2)f(Ij)$$

$$= \sum Ij^2 f(Ij) - 2\sum IjPf(Ij) + \sum P^2 f(Ij)$$

$$= \&E(Ij^2) - 2PE(Ij) + P^2 = E(Ij^2) - 2PP + P^2 = E(Ij^2) - P^2$$

$$= \&(0)^2 q + (1)^2 p - p^2 = P - P^2 = P(1-P) = p \cdot q$$

Bila x dan y peubah ajak yang bebas, maka:

$$\sigma^w_{ax+by} = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$$

Distribusi binomial mempunyai variansi

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \cdots + \sigma_{I_n}^2 \\ &= pq + pq + \cdots + pq \\ &= n.p.q\end{aligned}$$

Standar Devisiensi ($\boldsymbol{\sigma}$)

$$\sigma = \sqrt{n.p.q}$$

FPM dan FPMF pada distribusi binomial

$$M_x(t) = (q + pe^t)^n$$

$$G_x(t) = (q + pt)^n$$

Contoh Soal:

1) Probabilitas sebuah komponen mobil tidak rusak ketika dijatuhkan adalah ¾. Berapakah probabilitasnya ada 2 dari 4 komponen yg dijatuhkan akan tidak rusak?

   Penyelesaian:

   Misalkan

   Sukses = tidak rusak → $p = \frac{3}{4}$

   Gagal = rusak → $q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

   Total semua percobaan adalah $n = 4$

   Jumlah yang sukses adalah $x = 2$

   Sehingga

$$P(2) = b\left(2; 4; \frac{3}{4}\right) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!}\frac{9}{16}\frac{1}{16} = \frac{27}{128}$$

8.4. Distribusi Multinomial

Suatu percobaan merupakan percobaan multinomial jika pada setiap percobaan dalam percobaan binomial memberikan hasil lebih dari dua. Misalnya, pengambilan bola dengan pengembalian dalam sebuah kotak yang berisikan bola dengan 4 warna merupakan percobaan multinomial. Pengambilan kartu dengan pengembalian apabila gambar dipandang sebagai hasilnya. Jika setiap percobaan dapat memberikan sejumlah k hasil yang mungkin, yaitu $E_1, E_2, \ldots, E_k$ dengan nilai probabilitas $P_1, P_2, \ldots, P_k$, maka distribusi multinomial akan menghasilkan terjadinya E_1 sebanyak x_1 kali, E_2 sebanyak x_2 kali,... dan E_k sebanyak x_k kali untuk percobaan-percobaaan yang independen, dimana $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$. Distribusi probabilitasnya dapat ditulis: $(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ p_1, p_2, \ldots, p_k;\ n)$ di mana $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

Penurunan rumus dalam distribusi binomial dapat digunakan untuk memperoleh rumus umum distribusi multinomial. Untuk percobaan-percobaan independen, suatu urutan tertentu menghasilkan x_1 untuk E_1, x_2 untuk E_2, ..., dan x_k untuk E_k. Misalnya dengan nilai probabilitas masing-masing $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}, \ldots, p_k^{x_k}$. Dalam hal ini, jumlah urutan yang mungkin terjadi untuk n percobaan dapat dituliskan sbb:

$$\binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}$$

Distribusi multinomial didapat dari hasil kali nilai probabilitas dari suatu urutan tertentu dengan jumlah urutan yang mungkin terjadi dalam n percobaan

Definisi

Jika dalam suatu percobaan dapat menghasilkan sejumlah k hasil $E_1, E_2, \ldots, E_k$ dengan nilai probabilitas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, maka distribusi probabilitas dari variabel random $x_1, x_2, \ldots, x_k$ yang menyatakan jumlah terjadinya kejadian $E_1, E_2, \ldots, E_k$ dalam n percobaan-percobaan yang independen dapat dituliskan sbb:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

Dengan $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ dan $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, x = x_1, x_2, \ldots, x_n$

Di mana:

$x =$ peubah acak multinomial $(x_i \geq 0, x_i \in Z^+)$

$p =$ peluang sukses $(0 \leq p \leq 1)$

$n =$ banyaknya usaha bebas $(n \geq 0)$

Parameter$=$ n dan $p_i, i = 1,2, \ldots, k$

Dengan syarat: $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ dan $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$P(x)$ adalah fungsi peluang sehingga harus memenuhi:

a) $\left((0 \le P(x) \le 1)\right)$

b) $\sum_{x=x_i}^{n} f(x_1, x_2, \dots, ;)$

Means (μ)

$$\mu = E(x)$$
$$= \sum_{x} x f(x)$$
$$= \sum_{x=x_i}^{n} x \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_k^{x_k}$$

Variansi (σ^2)

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$
$$= \sum_{x} x^2 f(x) - E^2(x)$$
$$= \sum_{x} x^2 \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_k^{x_k} -$$
$$\left(\sum_{x=x_i}^{n} x \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_k^{x_k} \right)^2$$

Standar Deviasi (SD)

$$SD = \sigma = \sqrt{\sum_{x} x^2 \binom{n}{x_1, \dots, x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} - \left(\sum_{x=x_i}^{n} x \binom{n}{x_1, \dots, x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} \right)^2}$$

Contoh Soal:

1) Dua buah dadu dilempar enam kali, berapa peluang muncul bilangan yang hasil penjumlahannya adalah 7 atau 11 sebanyak dua kali, bilangan yang sama muncul sekali dan hasil yang lainnya muncul tiga kali?

   Penyelesaian:

   Banyaknya titik sampel pada pelemparan dua buah dadu adalah 36 titik sampel

   1. Kejadian E_1, muncul bilangan yang hasil penjumlahannya adalah 7 atau 11 sebanyak dua kali. Peluangnya adalah $\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$
   2. Kejadian E_2 muncul bilangan yang sama sebanyak dua sekali. Peluangnya adalah $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

3. Kejadian E_3, muncul hasil lainnya sebanyak dua sekali. Peluangnya adalah $1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$

Diketahui juga $n = 6$ dimana $x_1 = 2, x_2 = 1,$ dan $x_3 = 3$ maka persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus Distribusi Multinomial.

$$f(x, p; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

$$= \binom{6}{2,1,3} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{11}{18}\right)^3$$

$$= \frac{6!}{2!\,1!\,3!} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{11}{18}\right)^3$$

$$= 60 \cdot \frac{4}{81} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1331}{5832}$$

$$= \frac{6655}{59049}$$

8.5. Distribusi Hipergeometrik

Dalam distribusi binomial tidak berlaku, jika pengambilan dilakukan tanpa pengembalian. Misalkan kita ingin memperoleh sejumlah x sukses dari k item dan $n - x$ gagal dari $N - k$ item dalam suatu sampel random berukuran n diambil dari sebanyak N item. Langkah-langkah ini dikenal sebagai percobaan hipergeometrik. Adapun sifat-sifat percobaan hipergeometrik antara lain: (a) Sampel random berukuran n dipilih dari N item. (b) Sejumlah k dari N item didefinisikan sebagai sukses, dan $N - k$ item didefinisikan sebagai gagal.

Definisi

Variabel random hipergeometrik mempresentasikan jumlah sukses dalam eksperimen hipergeometrik

Distribusi hipergeometrik merupakan distribusi probabilitas dari variabel random hipergeometrik x. Distribusi ini besarnya tergantung pada jumlah sukses sebagai bagian dari N yang diambil sebanyak n item, dan diberi notasi $h(x;\, N, n, k)$. Distribusi hipergeometrik merupakan disribusi probabilitas yang mempresentasikan jumlah sukses dari sampel random n yang diambil dari N item, dimana sebanyak k item bertanda sukses dan sebanyak $N - k$ bertanda gagal. Distribusi ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}};x=0,1,\dots,n$$

dimana

$x=$ peubah acak

$N=$ banyaknya sampel

$n=$ banyaknya usaha

Syarat $P(x)=h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ merupakan fungsi peluang adalah $(0\le P(x)\le 1)$

Mean (μ)

$\mu=E(x)$

$$=\sum_{x=0}^{n}x\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x\frac{k!}{(k-x)!\,x!}\frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}x\frac{k\cdot(k-1)!}{x(x-1)!\,(k-x)!}\frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\frac{(k-1)!}{(x-1)!\,(k-x)!}\frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\frac{\binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Ambil $y=x-1$ sehingga

$$E(x)=\frac{\binom{k-1}{y}\binom{N-k}{n-1-y}}{\binom{N}{n}}$$

karena

$$\binom{N-k}{n-1-y} = \binom{(N-1)-(k-1)}{n-1-y}$$

dan

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} = \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}$$

Maka diperoleh

$$E(x) = \frac{\binom{k-1}{y}\binom{N-k}{n-1-y}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{nk}{N}\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{k-1}{y}\binom{(N-1)-(k-1)}{n-1-y}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

$$= \frac{nk}{N}$$

Variansi ($\boldsymbol{\sigma^2}$)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(x^2) - \mu^2 \\ &= E(x(x-1)) + \mu - \mu^2 \\ &= \frac{k(k-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nk}{N} - \frac{n^2k^2}{N^2} \\ &= \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\end{aligned}$$

Standar Deviasi (SD)

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{(N-n)}{N-1}\cdot n\cdot\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)}$$

Jika pada persamaan distribusi hipergeometrik, diambil n lebih kecil dari N, maka besar probabilitas terjadinya sukses pada setiap pengambilan akan berubah sangat kecil, sehingga percobaan binomial merupakan pendekatan dari percobaan hipergeometrik dimana $p = \frac{k}{n}$

Mean dan variansinya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mu = np = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma^2 = npq = n \cdot \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

Perbedaan σ^2 dari distribusi hipergeometrik hanya ada pada $\frac{N-n}{N-1}$, diamana nilai ini dapat diabaikan jika n sangat kecil dibandingkan dengan N.

Contoh Soal:

1) Dalam sebuah kotak terdapat 7 bola yang 3 diantaranya berwarna merah. Jika dari dalam tersebut diambil 3 bola secara acak, hitunglah peluang terambilnya bola tersebut terdapat:
   a. satu bola berwarna merah?
   b. Tidak ada bola merah?

   Penyelesaian:

   Dari soal tersebut diketahui $N = 7, k = 3$, dan $n = 3$ dengan demikian maka

   a. Satu bola merah?

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$h(1; 7,3,3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7-3}{3-1}}{\binom{7}{3}}$$

$$= \frac{3 \cdot 6}{35}$$

$$= \frac{18}{35}$$

   b. Tidak ada bola merah?

$$h(0; 7,3,3) = \frac{\binom{3}{0}\binom{7-3}{3-0}}{\binom{7}{3}}$$

$$= \frac{1 \cdot 4}{35}$$

$$= \frac{4}{35}$$

8.6. Distribusi Poisson

Suatu percobaan merupakan percobaan poisson jika percobaan itu menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada selang waktu ataupun pada daerah khusus/tertentu. Selang waktu dapat berupa detik, menit, jam, hari, minggu, bulan, maupun tahun. Sedangkan yang merupakan daerah tertentu misalnya garis, luas, sisi, maupun sebuah benda. Contoh yang berhubungan dengan selang waktu, antara lain adalah jumlah kendaraan roda empat yang lewat per jam di jalan parmuka, jumlah bayi lahir perbulan di sebuah rumah sakit, dan sebagainya. Dan yang berhubungan dengan daerah tertentu, misalnya jumlah penduduk didesa panji, jumlah siswa yang tidak lulus pada suatu sekolah, dan lain-lain. Sifat-sifat yang berlaku pada percobaan poisson antara lain: (a) Banyaknya sukses yang terjadi pada selang waktu atau daerah tertentu bersifat independen terhadap yang terjadi pada selang waktu atau daerah tertentu yang lain. (b) Besar probabilitas terjadinya sukses pada selang waktu atau daerah tertentu yang sempit, sesuai dengan panjang selang waktu ataupun ukuran daerah terjadinya sukses tersebut. (c) Besar probabilitas terjadinya lebih dari satu sukses pada selang waktu yang singkat ataupun daerah yang sempit dapat diabaikan.

Definisi

Dalam percobaan poisson, jumlah sukses merupakan variabel random poisson

Distribusi Poisson merupakan distribusi probabilitas dari variabel random poisson X. Distibusi ini nilainya tergantung pada μ yang mempresentasikan banyaknya sukses yang terjadi pada selang waktu tertentu atau pada daerah tertentu dan diberi notasi $P(x;\ \mu)$. Distribusi ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!}, x = 1,2,3, \dots, k$$

Dengan μ jumlah sukses yang terjadi dan $e = 2{,}71828 \dots$

Dengan:

$x =$ peubah rata-rata

$\mu =$ rata rata banyaknya keberhasilan yang terjadi dalam selang waktu

$e = 2{,}71828 \dots$

Syarat $P(x,\mu) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!}$, merupakan fungsi peluang adalah

a) $0 \leq P(x,\mu) \leq 0$

b) $\sum_{x=0}^{\infty} P(x;\mu) = 1$

Mean ($\boldsymbol{\mu}$)

$$\mu = E(X)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{x}(\mu^{-1}\mu)}{x!}$$

$$= \mu \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

Misalkan $y = x - 1$

$$E(x) = \mu \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{y!}$$

$$= \mu P(y;\mu)$$

$$= \mu 1$$

$$= \mu$$

Variansi ($\boldsymbol{\sigma^2}$)

$$E(x(x-1)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{x}(\mu^{2}\mu^{-2})}{x(x-1)(x-2)!}$$

$$= \mu^{2} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{x-2}}{(x-2)!}$$

Misalkan $y = x - 2$ maka diperoleh:

$$E(x(x-1)) = \mu^{2} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}$$

$$= \mu^{2} P(y;\mu)$$

$$= \mu^{2} \cdot 1$$

$$= \mu^{2}$$

Jadi

$$\sigma^2 = E(x(x-1)) + \mu - \mu^2$$
$$= \mu^2\mu - \mu^2 = \mu$$

Standar Deviasi (SD)

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$

Pada umumnya, jika $n \to \infty, p \to 0$ dan np sebuah konstanta maka distribusi Poisson merupakan bentuk terbatas dari distribusi binomial. Oleh karena itu, distribusi poisson dapat digunakan sebagai pendekatan terhadap distribusi binomial, di mana $\mu = np$. Distribusi poisson masih bisa dipakai sebagai pendekatan terhadap distribusi binomial meskipun $p \to 1$ yaitu dengan menukar sukses menjadi gagal atau dengan mengubah nilai p mendekati nol

Teorema

Jika $n \to \infty, p \to 0$ dan $np = \mu$, maka $b(x;\ n, p) \to p(x;\ \mu)$

Contoh soal:

1) Ruang gawat darurat sebuah rumah sakit memiliki tingkat kedatangan pasien rata-rata sebanyak 5orang perhari. Berapa probabilitas kedatangan 2 pasien perhari?

   Penyelesaian:

   Diketahui bahwa:

$$t = 1, \mu = 5, x = 2$$
$$P(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\ \mu^x}{x!}$$
$$P(2;5) = \frac{e^{-5}\ 2^2}{2!} = 0{,}084$$

8.7. Binomial Negatif

Percobaan binomial negatif memiliki sifat-sifat yang sama dengan sifat-sifat pada percobaan binomial, tetapi percobaannya dilakukan sampai menghasilkan sejumlah sukses. Di sini tidak dicari kemungkinan terjadinya x sukses dalam n percobaan, melainkan kemungkinan dimana sukses yang ke k terjadi pada percobaan yang ke-x.

Definisi

Misalkan x adalah bilangan yang menyatakan banyaknya percobaan yang dilakukan untuk mendapatkan k sukses dalam suatu eksperimen binomial, maka x merupakan variabel binomial negatif.

Distribusi probabilitasnya disebut sebagai distribusi binomial negatif. Distribusi ini nilainya tergantung pada jumlah sukses yang diinginkan dan kemungkinan jumlah sukses pada percobaan yang dilakukan, dan diberi notasi $b^*(x, k, p)$. Jika beberapa percobaan independen menghasilkan sukses dengan kemungkinan p dan gagal dengan kemungkinan $q = 1 - p$, maka distribusi probabilitas variabel random X yang menyatakan banyaknya percobaan yang harus dilakukan untuk memperoleh k sukses, dapat ditulis:

$$P(x) = b^*(x, k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

Untuk $x = k, k+1, k+2, \dots, k+n$

Dimana

x = peubah acak binomial negatif

p = peluang sukses

q = peluang gagal dimana $q = 1 - p$

k = parameter engan $k \geq 0$ dan k ∈ bilangan bulat

Syarat $P(x)$ merupakan fungsi peluang adalah:

a) $0 \leq p(x) \leq 1$
b) $\sum_{x=k}^{k+n} P(x) = 1$

Mean ($\boldsymbol{\mu}$)

$$\begin{aligned} \mu &= E(x) \\ &= \sum_{x=k}^{k+n} xP(x) \\ &= \sum_{x=k}^{k+n} x \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \end{aligned}$$

Variansi ($\boldsymbol{\sigma^2}$)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(x^2) - E^2(x) \\ &= \sum_{x=k}^{k+n} x^2 P(x) - \left[\sum_{x=k}^{k+n} x \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}\right]^2 \\ &= \sum_{x=k}^{k+n} x^2 \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} - \left[\sum_{x=k}^{k+n} x \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}\right]^2 \end{aligned}$$

Standar Deviasi (SD)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{x=k}^{k+n} x^2 \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} - \left[\sum_{x=k}^{k+n} x \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}\right]^2}$$

Contoh Soal

1) Tiga uang logam dilantunkan sekaligus. Berapa peluang semuanya menghasilkan sisi gambar (G) atau sisi angka (A) untuk kedua kalinya pada pelantunan kelima?

   Penyelesaian

   Dari soal di atas diketahui bahwa:

$$x = 5, k = 2, p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(x) = b^*\left(5, 2, \frac{1}{4}\right) = \binom{5-1}{2-1}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{257}$$

8.8. Distribusi Geometris

Jika beberapa percobaan independen menghasilkan sukses dengan kemungkinan p dan gagal dengan kemungkinan q = 1 - p, maka distribusi probabilitas dari banyaknya percobaan yang harus dilakukan untuk mendapat satu kali sukses adalah:

$$P(x) = g(x; p) = p. q^{x-1}, x = 1,2,3, \ldots$$

Di mana

x = peubah acak

p = Peluang sukses $(0 \leq p \leq 1)$

q = Peluang gagal $(0 \leq q \leq 1)$

$p + q = 1$

Syarat $P(x) = g(x; p) = p\, q^{1-x}$ merupakan fungsi peluang adalah

a. $(0 \leq p(x) \leq 1)$
b. $\sum_{x=1}^{n} P(x) = 1$

Mean (μ)

$$
\begin{aligned}
\mu &= E(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} xg(x;p) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (p \cdot q^{1-x}) \\
&= p + 2p \cdot q + 3 \cdot p \cdot q^2 + \cdots = p(1 + 2q + 3q^2 + \cdots) \\
&= (1-q)(1 + 2q + 3q^2 + \cdots) \\
&= (1 + 2q + 3q^2 + \cdots) - (q + +2q^2 + 3q^4 + \cdots) \\
&= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Pernyataan di atas merupakan deret geometri dengan $r = q$

$$
\begin{aligned}
\mu &= E(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} xg(x;p) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (p \cdot q^{1-x}) \\
&= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

Variansi ($\boldsymbol{\sigma^2}$)

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(x^2) - E^2(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 g(x;p) - \frac{1}{p^2} \\
&= (p + 4p \cdot q + 9p \cdot q^2 + \cdots) - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{p^2(p + 4p \cdot q + 9p \cdot q^2 + \cdots) - 1}{p^2} \\
&= \frac{(1-q)^2(p + 4p \cdot q + 9p \cdot q^2 + \cdots) - 1}{p^2} \\
&= \frac{(p + 2p \cdot q + 2p \cdot q^2 + 2p \cdot q^3 + \cdots) - 1}{p^2} \\
&= \frac{p(1 + 2 \cdot q + 2 \cdot q^2 + 2 \cdot q^3 + \cdots) - 1}{p^2} \\
&= \frac{(1-q)(1 + 2 \cdot q + 2 \cdot q^2 + 2 \cdot q^3 + \cdots) - 1}{p^2} \\
&= \frac{(1 + 2 \cdot q + 2 \cdot q^2 + 2 \cdot q^3 + \cdots) - (q + 2 \cdot q^2 + 2 \cdot q^3 + \cdots) - 1}{p^2} \\
&= \frac{(1 + q - 1)}{p^2} \\
&= \frac{(q)}{p^2}
\end{aligned}
$$

Standar Deviasi (SD)

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$$

FPM dan DPMF pada distribusi geometris

$$M_x(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$
$$G_x(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$

Contoh Soal:

1) Dalam suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata 1 di antara 100 butir hasil produksi adalah cacat. Misalkan diperiksa 5 butir, berapa peluang ditemukan satu buah cacat setelah butir kelima?

   Penyelesaian:

   Dari soal di atas diketahui bahwa

   $p = \frac{1}{100}$ dan $x = 5$, maka

   $P(x) = g(x; p) = p.q^{x-1}$

   $P(5) = g\left(5; \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^4 = \frac{96{,}059{,}601}{10.000.000.000}$