CONTOH MENYELESAIKAN PERTIDAKSAMAAN

Contoh:

Tentukan penyelesaian $x^2 - 5x + 6 > 0$

Jawab:

Dengan memfaktorkan ruas kiri pertidaksamaan, maka diperoleh:

$$(x-2)(x-3) > 0$$

Telah diketahui bahwa hasil kali 2 bilangan real positif apabila ke dua faktor positif atau ke dua faktor negatif. Oleh karena itu,

(i). Jika ke dua faktor positif maka:

$$x - 2 > 0 \text{ dan } x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ dan } x > 3$$

Sehingga diperoleh: $x > 3$.

(ii). Jika ke dua faktor negatif, maka:

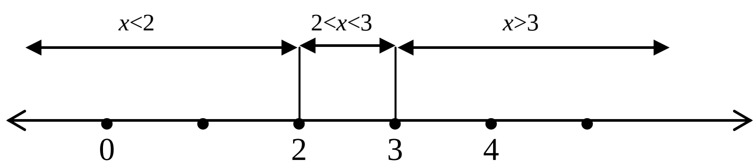
$$x - 2 < 0 \text{ dan } x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \text{ dan } x < 3$$

Diperoleh: $x < 2$.

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan $x^2 - 5x + 6 > 0$ adalah x < 2 atau x > 3.

Penyelesaian pertidaksamaan di atas dapat pula diterangkan sebagai berikut: Ruas kiri pertidaksamaan bernilai nol jika $x = 2$ atau $x = 3$. Selanjutnya, ke dua bilangan ini membagi garis bilangan menjadi 3 bagian: $x < 2$, $2 < x < 3$, dan $x > 3$.



Gambar 1.2

Pada bagian $x < 2$, nilai $(x-2)$ dan $(x-3)$ keduanya negatif, sehingga hasil kali keduanya positif. Pada segmen $2 < x < 3$, $(x-2)$ bernilai positif sedangkan $(x-3)$ bernilai negatif. Akibatnya, hasil kali keduanya bernilai negatif. Terakhir, pada bagian $x > 3$, $(x-2)$ dan $(x-3)$ masing-masing bernilai positif sehingga hasil kali keduanya juga positif.

	Tanda nilai			Kesimpulan
	$x-2$	$x-3$	$(x-2)(x-3)$	
x < 2	-	-	+	Pertidaksamaan dipenuhi
2<x<3	+	-	-	Pertidaksamaan tidak dipenuhi
x>3	+	+	+	Pertidaksaman dipenuhi

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan adalah x < 2 atau x > 3.

Contoh:

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $x^3 - 2x^2 - x + 1 \le -1$.

Jawab:

Apabila ke dua ruas pada pertidaksamaan di atas ditambah 1, maka diperoleh:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 \le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) \le 0$

Jika $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$, maka diperoleh: $x = -1$, $x = 1$, atau $x = 2$.

Selanjutnya, perhatikan tabel berikut:

Nilai-nilai peubah x = -1, x = 1, x = 2 disebut titik kritis.

	Tanda nilai/nilai				Kesimpulan
	$x+1$	$x-1$	$x-2$	$(x+1)(x-1)(x-2)$	
x < -1	-	-	-	-	Pertidaksamaan dipenuhi
-1 < x < 1	+	-	-	+	Pertidaksamaan tidak dipenuhi
1 < x < 2	+	+	-	-	Pertidaksamaan dipenuhi
x > 2	+	+	+	+	Pertidaksamaan tidak dipenuhi
x = -1	0	-2	-3	0	Pertidaksamaan dipenuhi
x = 1	2	0	-1	0	Pertidaksamaan dipenuhi
x = 2	3	1	0	0	Pertidaksamaan dipenuhi

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan $x^3 - 2x^2 - x + 1 \le -1$ x ≤ -1 atau $1 \le x \le 2$.

Cara lain untuk menentukan penyelesaian pertidaksamaan $x^3 - 2x^2 - x + 1 \le -1$.

adalah dengan menggunakan garis bilangan

$x^3 - 2x^2 - x + 1 \le -1$

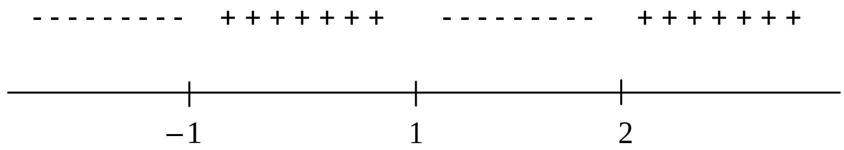
$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 1 + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) \le 0,$

Sehingga titik kritis pertidaksamaan adalah

$x = 1,\ x = -1,\ dan\ x = 2$

Dengan memilih satu titik sebarang disetiap interval diatas diperoleh:



Gambar 1.3

Berdasarkan garis bilangan di atas penyelesaian pertidaksamaan adalah
$x \le -1$ atau $1 \le x \le 2$.

Berdasarkan contoh di atas, penyelesaian suatu persamaan berupa titik (diskrit), sedangkan selesaian pertidaksamaan berupa selang/interval (kontinu).

Selang

Diberikan sebarang dua bilangan real a dan b, dengan $a < b$.

Berturut-turut didefinisikan:

$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ $\quad$ $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$

$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ $\quad$ $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$

$[a,\infty) = \{x \mid x \ge a\}$ $\quad$ $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$

$(-\infty,a] = \{x \mid x \le a\}$ $\quad$ $(-\infty,a) = \{x \mid x < a\}$