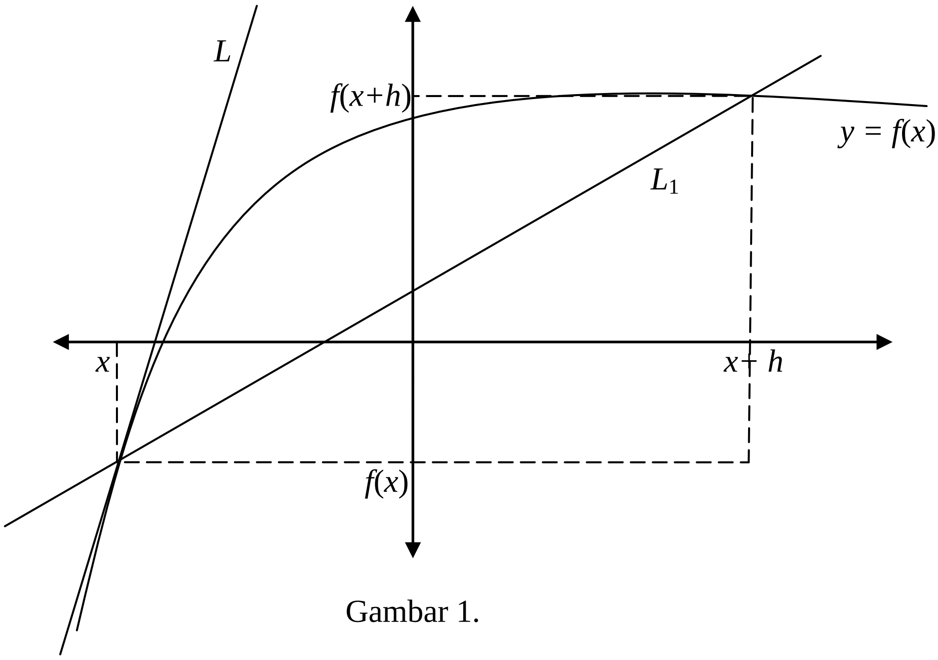
PENGERTIAN DAN SIFAT TURUNAN

Pengertian dan Sifat Turunan

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.

Pada gambar di atas, garis L menyinggung kurva y = $f(x)$ di titik $(x, f(x))$, sedangkan garis L_1 melalui titik $(x, f(x))$ dan titik $(x+h, f(x+h))$. Jika h mendekati nol, maka garis L_1 akan mendekati garis L, sehingga gradien garis L_1 akan mendekati gradien garis L. Hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk limit sebagai berikut:

$$m_L = \lim_{h\to 0} m_{L_1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Bentuk $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dikenal sebagi turunan fungsi $y = f(x)$, yang dinotasikan dengan

$$\frac{dy}{dx},\ y',\ \frac{df}{dx},\ \text{atau } f'(x).$$

Dengan demikian secara geometri, turunan fungsi merupakan gradien dari garis singgung kurva fungsi tersebut.

Contoh:

Tentukan garis singgung kurva $y = x^2$ di titik (2,4)

Penyelesaian:

Gradien garis singgung kurva $y = x^2$ di titik (2,4) adalah

$$m = f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h\to 0} (4+h) = 4.$$

Oleh karena itu persamaan garis singgungnya adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - 4 = 4(x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$$

Jika kita menentukan turunan secara langsung dengan menggunakan definisi turunan, maka kita akan mendapatkan banyak kesulitan dan memakan waktu lama. Untuk itu, diperlukan cara lain di samping dengan menggunakan definisi secara langsung, yaitu dengan menggunakan sifat dan rumus turunan.

Beberapa sifat penting dalam pencarian turunan suatu fungsi, adalah sebagai berikut:

1. **Aturan perkalian dengan konstanta**

   Jika c konstanta dan f fungsi yang dapat diturunkan, maka

   $$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

2. **Aturan jumlah.**

   Jika f dan g keduanya dapat diturunkan, maka

   $$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

3. **Aturan selisih**

   Jika f dan g keduanya dapat diturunkan, maka

   $$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

4. **Aturan hasil kali**

   Jika f dan g keduanya dapat diturunkan, maka

   $$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

5. Aturan hasil bagi

Jika f dan g keduanya dapat diturunkan, maka

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Bukti:

1. Aturan perkalian dengan konstanta

Jika c konstanta dan f fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}$$
$$=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

2. Aturan jumlah

Jika f dan g keduanya dapat diturunkan, maka

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}$$
$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

3. Aturan selisih

Untuk latihan

4. Aturan hasil kali

Jika f dan g keduanya dapat diturunkan, maka

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}+g(x)\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}$$
$$=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

5. Aturan hasil bagi

Untuk latihan.

Beberapa rumus dasar turunan, disajikan pada tabel berikut.

Nomor	Fungsi	Turunan fungsi
1	$y = k$, k konstanta	$y' = 0$
2	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
3	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$

Bukti:

1. $$y = k \Rightarrow y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0$$

2. $$y = x^n \Rightarrow y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}]$$

$$= nx^{n-1}$$

3. $$y = \ln x \Rightarrow y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln[1+\frac{h}{x}]}{h} = \lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$= \ln\left[\lim_{h\to 0}[(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}]^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$