PENGGUNAAN TURUNAN: APLIKASI

Gerak Lurus dan Gerak Melingkar

Gerak lurus suatu partikel P sepanjang garis lurus dengan persamaan S = f (t), bila t > 0 dalam waktu tertentu S adalah lintasan dari P yang diukur dari titik permulaan. Kecepatan artikel P pada t tertentu adalah $v_t = \frac{ds}{dt}$ dan percepatannya $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

Suatu partikel P bergerak sepanjang lingkaran dengan persamaan θ = f (t) dimana θ adalah sudut sentral (radian) yang dibentuk oleh gerak jari-jari dalam t. Kecepatan sudut dari P pada waktu t adalah

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ percepatan sudut dari P pada waktu t adalah

$\omega = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \alpha$ adalah konstan untuk semua t

P bergerak percepatan sudut konstan.

Contoh :

1. sebuah benda bergerak pada sebuah garis lurus dengan persamaan :

   $s = t^9 + 6t^2 + 9t + 4$ (m) bila $v_t = 0$

   berapakah s dan a

   penyelesaian :

   $v_t = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$

   $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 12 = 6(t - 2)$

   $v_t = 0 \rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0$

   $(t - 1)(t - 3) = 0$

   $T_1 = 1$ dan $t_2 = 3$

   Bila t = 1, $s = 1^9 - 6.1^2 + 9.1 + 4 = 8$ m

   $A = 6(1-2) = -6$ m/dt²

2. sebuah roda bergerak dengan persamaan

   θ=128t-12t^2 tentukan kecepatan dan percepatan pada t=3 detik.

   Penyelesaian :

   $$\omega = \frac{d\ \theta}{dt} = 128 - 24t$$

   $$t = 3 \rightarrow \omega = 128 - 72 = 56\,rad/dt$$

   $$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -24\,rad/dt^2$$

Contoh Penggunaan Nilai Ekstrim

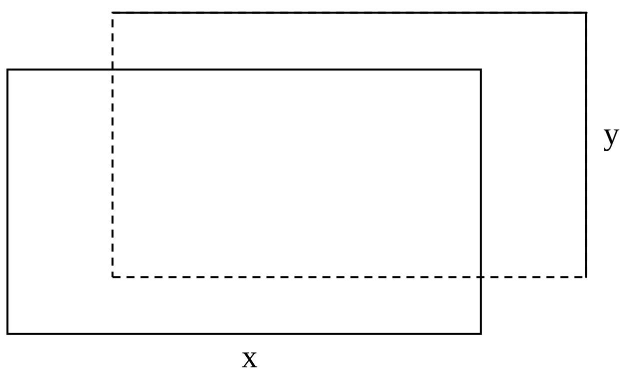
1. Suatu kotak tanpa tutup yang alasnya berbentuk bujur sangkar akan dibuat dari selembar karton dan volume kotak itu 4 m^3.

   Tentukan ukuran kotak tersebut agar bahan yang dipergunakan seminimal mugkin.

   Penyelesaian:

   Misalkan panjang sisi kotak x dan tinggi kotak y. Dengan demikian volume kotak (v) adalah:

   V = x^2y $\rightarrow$ 4 = x^2y $\rightarrow$ y = $\frac{4}{x^2}$ dengan x > 0



   Banyaknya karton yang diperlukan = luas seluruh permukaan kotak.

   L (x) = $x^2 + 4xy$

   = $x^2 + 4x(4/x^2) = x^2 + 16/x^2$ dengan x > 0

L ^{y} (x) = $\frac{2x^3 - 16}{x^2}$ nilai kritis L ^{y} (x) = 0

$$\frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \quad \rightarrow x = 2$$

Untuk membuktikan x = 2 apakah minimum / maksimum dicari turunan ke-2 dari L(x)

L ^{yy} (x) = 2 + 32/x^3 → L ^{yy} (2) = 6

Jadi L ^{yy} (x) > 0 → x = 2 minimum

Ukuran kotak itu x = 2 m dan y = 1 m.

2. Suatu pabrik memproduksi kotak tanpa tutup dengan volume (v = 32 dm^3). Tentukan ukuran kotak agar bahan yang dipergunakan sehemat-hematnya.

Penyelesaian :

Misalkan x = panjang kotak ; y = lebar kotak dan z = tinggi kotak

v = xyz = 32 z = 32/xy

Luas bahan yang diperlukan (A)

A = 2xz + 2yx + xy

= 2x (32/xy) + 2y (32/xy) + xy

= 64/y + 64/x + xy

Agar bahan yang diperlukan sekecil-kecilnya maka harus dipenuhi :

$$\frac{aA}{ax} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{aA}{ay} = 0$$

$$\frac{aA}{ax} = \frac{a}{ax}(64/y) + \frac{a}{ax}(64/x) + \frac{a}{ax}(xy) = -64/x^2 + y$$

$-64/x^2 + y = 0 \rightarrow yx^2 = 64$

$$\frac{aA}{ay} = \frac{a}{ay}(64/y) + \frac{a}{ay}(64/x) + \frac{a}{ay}(xy) = -64/y^2 + x$$

$-64/y^2 + x = 0 \rightarrow xy^2 = 64$

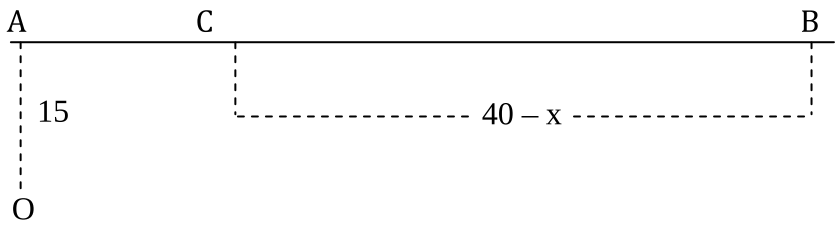
$yx^2 = xy^2 \rightarrow x = y$

$(x)(x^2) = 64 \rightarrow x = 4 \quad y = 4 \quad z = 2$

∴ ukuran kotak (4, 4, 2) dm

3. Seorang pengendara sepeda motor berada di titik O di tengah gurun pasir yang berjarak 15 km dari titik A yaitu titik terdekat yang bisa dicapai di jalan raya. Ia bermaksud menuju titik B di jalan raya tersebut dimana AB = 40 km. Bila kecepatan tempuh sepeda motor di jalan raya 80 kim/jam di gurun pasir 20 km/jam, tentukan suatu titik di jalan raya yang harus dicapai lebih dahulu agar waktu yang ditempuh untuk mencapai B adalah secepat-cepatnya.

Penyelesaian :



Misal titik C adalah titik yang mula-mula pada jalan raya yang berjarak x dari A.

OC = $\sqrt{15^2 + x^2}$ = $\sqrt{225 + x^2}$

CB = 40 – x

Waktu = $\dfrac{Jarakyangditempuh}{kecepa\tan}$

t = $\dfrac{OC}{20} + \dfrac{CB}{80}$

= $\dfrac{\sqrt{225 + x^2}}{20} + \dfrac{40 - x}{80}$

Agar waktu secepat-cepatnya maka t harus mencapai ekstrim.

→ $\dfrac{dt}{dx} = 0$

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{225 + x^2 .20}} - \dfrac{1}{80}$

$\dfrac{dt}{dx} = 0$ → $\dfrac{x}{\sqrt{225 + x^2 .20}} - \dfrac{1}{80} = 0$

Setelah diselesaikan akan didapatkan x = $\sqrt{15}$

$\therefore$ agar waktu tempuh secepat-cepatnya maka titik mula-mula yang harus dicapai di jalan raya adalah titik C yang berjarak $\sqrt{15}$ km dari titik A.

4. Seorang pemilik kebun kelapa menyatakan bahwa sebatang pohon kelapa dapat menghasilkan 200 butir buah kelapa per tahun apabila tidak lebih dari 10 pohon di tanam setiap tahun luas.

   Untuk setiap tambahan satu pohon di atas 10 pohon per satuan luas akan menyebabkan berkurangnya 5 butir buah kelapa per pohon.

   Berapa pohon kepala yang harus ditanam, per satuan luas agar hasilnya maksimum.

   Penyelesaian :

   Misalkan x banyaknya pohon kelapa yang harus ditanam per satuan luas.

   Banyaknya hasil per pohon (N) sangat tergantung dari x sehingga N = f(x).

   Setiap tambahan 1 pohon di atas 10 pohon akan menghasilkan 5 butir lebih sedikit.

   N = 200 – 5 (x – 10) bila x > 10

   Hasil per satuan luas = T = xN = x (250 – 5x) = 250x – $5x^2$

   Supaya T maksimum pada T harus mencapai titik ekstrim.

   $\frac{dt}{dx} = 250 - 10x \quad \rightarrow \quad \frac{d^2t}{dx^2} = -10$

   250 – 10x = 0 maka x = 25. $\frac{d^2t}{dx^2} < 0$ berarti x = 25 maksimum

   Hasil maksimum (T maksimum) = $250(25) - 5(25)^2 = 3125$

   Jadi 25 pohon kelapa ditanam setiap satuan luas agar mendapatkan hasil yang maksimum.

5. Jumlah biaya Radio sebanyak x buah adalah \$ ($1/4\ x^2 + 35x + 25$) dan harga sebuah radio jika dijual adalah \$ ($50 – 1/2x$).

   Berapakah jumlah radio yang harus dibuat agar mendapatkan laba sebanyak-banyaknya.

   Penyelesaian :

   Misalkan dibuat x radio setiap hari. Laba = y = harga jual – biaya produksi.

   $y \quad = x\,(50 – x/2) – (x^2/4 + 35x + 25)$

   $\quad\;\; = 50x – x^2/2 – (x^2/4 + 35 + 25)$

   $y^{y} = \frac{30-3x}{2} \quad \rightarrow y^{y\ y} = – 3/2 \quad \rightarrow y^{y\,y} < 0$ (maksimum).

   $0 = \frac{30-3x}{2} \quad \rightarrow x = 10$

   Jadi paling banyak 10 buah radio dibuat setiap hari agar mendapatkan keuntungan maksimum.

Sumber:

https://ributsantoso.files.wordpress.com/2011/05/bab-5-penggunaan-turunan.doc

.