Macam Distribusi Teoritis Variabel Acak Diskrit

1. Distribusi Bernouli

Suatu distribusi Bernoulli dibentuk oleh suatu percobaan Bernoulli (*Bernoulli trial*). Sebuah eksperimen Bernoulli harus memenuhi syarat :

a. Keluaran (outcome) yang mungkin hanya salah satu dari "sukses" atau "gagal"
b. Jika probabilitas sukses *p*, maka probabilitas gagal *q=1-p*

Dalam sebuah eksperimen Bernoulli, dimana p adalah probabilitas "sukses" dan q=1-p adalah probabilitas gagal, dan jika X adalah variabel acak yang menyatakan sukses, maka dapat dibentuk sebuah distribusi probabilitas Bernoulli sebagai fungsi probabilitas sebagai berikut :

$$p_B(x;p) = \begin{cases} p & x = 1 \\ (1-p) = q & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \; atau \; 1 \end{cases}$$

Atau $p_B(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}\,; x = 0{,}1; 0 \leq p \leq 1$

Mean dari distribusi Bernoulli adalah $\mu_x = E(X) = p$

Dan varians dari distribusi Bernoulli adalah $\sigma_x{}^2 = p(1-p) = pq$

Contoh Soal :

Di awal tahun ajaran baru, mahasiswa fakultas teknik biasanya membeli rapido untuk keperluan menggambar teknik. Di koperasi tersedia dua jenis rapido, yang tintanya dapat diisi ulang dan yang tintanya harus diganti bersama dengan catridgenya. Data yang ada selama ini menunjukkan bahwa 30% mahasiswa membeli rapido yang tintanya dapat diisi ualng. Jika variabel acak X menyatakan mahasiswa yang membeli rapido yang tintanya dapat diisi ulang, maka dapat dibentuk distribusi probabilitas sebagai berikut :

$$X = \begin{cases} 1 \; jika \; mahasiswa \; membeli \; rapido \; yang \; tintanya \; dapat \; diisi \; ulang \\ 0 \; jika \; mahasiswa \; membeli \; rapido \; yang \; catridgenya \; harus \; diganti \end{cases}$$

Sehingga

$p(1) = P(X = 1) = 0{,}3$

$p(0) = P(X = 0) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$p(x \neq 1 \; atau \; 0) = P(X \neq 1 \; atau \; 0) = 0$

maka fungsi probabilitasnya adalah fungsi Bernoulli dengan satu parameter p=0,3 dinotasikan

$$p_B(x;p) = \begin{cases} 0{,}3 & x = 1 \\ 0{,}7 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0\ atau\ 1 \end{cases}$$

Atau $p_B(x; 0{,}3) = (0{,}3)^x (0{,}7)^{1-x}$; $x = 0{,}1; 0 \leq p \leq 1$

2. Distribusi Binomial

Distribusi binomial adalah distribusi probabilitas variabel acak diskrit yang diturunkan berdasarkan eksperimen Bernoulli. Suatu eksperimen disebut eksperimen Bernoulli, jika memenuhi kriteria sebagai berikut :

a. Eksperimen tersebut dapat diulangi sebanyak n kali
b. Setiap eksperimen hanya menghasilkan dua peristiwa, yaitu sukses (S) dan gagal (G).
c. P(S) = p dan P(G) = 1 – p = q dimana nilai p dan q bersifat tetap untuk setiap eksperimen.
d. Setiap eksperimen bebas satu sama lainnya

Misalkan suatu eksperimen terdiri dari n eksperimen Bernoulli dengan probabilitas sukses p dan probabilitas gagal q = 1 – p, dan misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan jumlah sukses dari n eksperimen tersebut, maka distribusi probabilitas untuk X dituliskan sebagai X ~ b(n,p) dengan fungsi probabilitasnya adalah :

$p_b(x; n, p) = \ {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ untuk x = 0, 1, 2, 3, ... , n

Dimana ${}_nC_x$ adalah kombinasi dari n objek dimaan untuk setiap pemilihan diambil x objek.

Fungsi distribusi kumulatifdari distribusi probabilitas binomial diatas dapat dinyatakan sebagai

$$F_b(x; n, p) = \sum_{k=0}^{x} p_b(k; n, p) = \sum_{k=0}^{x} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

Rata-rata (mean) dari variabel acak X yang berdistribusi binomial

$\mu_X = E(X) = np$

Varians dari variabel acak X yang berdistribusi binomial

Var(X) = $\sigma_X^2 = npq$

Contoh soal :

Sepuluh dadu yang homogin ditoss sekaligus, berapakah probabilitas muncul muka bertitik 6 sebanyak 3 buah dadu.

Jawab :

Misalkan X adalah variabel acak yang menunjukkan jumlah dadu dengan muka yang muncul bertitik 6

n = 10 p = 1/6 q = 5/6

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(1/6)^3(5/6)^7 = 0.155$$

3. Distribusi Binomial Negatif

Suatu eksperimen yang memenuhi kriteria suatu distribusi binomial negatif adalah sebagai berikut :

a. Eksperimen terdiri dari serangkaian percobaan yang saling bebas
b. Setiap percobaan hanya dapat menghasilkan satu dari dua keluaran yanng mungkin, sukses atau gagal
c. Probabilitas sukses *p* dan probabilitas gagal *q=1-p* selalu konstan dalam setiap percobaan
d. Eksperimen terus berlanjut sampai sejumlah total *r* sukses diperoleh, dimana *r* berupa bilangan bulat tertentu

Apabila dalam sebuah eksperimen binomial negatif dari serangkaian percobaan dimana *p* adalah probabilitas sukses dan *q=1-p* adalah probabilitas gagal dalam setiap percobaan, maka jika variabel acak X menyatakan banyaknya x gagal dam r sukses tercapai pada eksperimen tersebut, dapat diperoleh fungsi probabilitas binomial negatif

$$p_{nb}(x; r, p) = \ {}_{x+r-1}C_{r-1} p^r (1-p)^x$$

$$x = 0,1,2,\ldots$$

$$r > 0, r \in bil.bulat$$

$$0 \le p \le 1$$

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi binomial negatif adalah

$$F_{nb}(x;r,p) = \sum_{k=0}^{x} p_{nb}(k;r,p) = \sum_{k=0}^{x} \quad {}_{k+r-1}C_{r-1}p^{r}(1-p)^{k}$$

Contoh soal :

Seorang peneliti tengah menginokulasi beberapa tikus putih dengan menyuntikkan virus yang menyerang metabolisme pencernaan sampai ia memperoleh 3 ekor tikus putih terserang penyakit tersebut. Bila probabilitas terjangkit penyakit itu adalah 25%, berapa probabilitas bahwa dalam percobaan itu diperlukan 10 ekor tikus.

Jawab

p_{nb} (10: 3,0.25) = ${}_{9}C_{2}$ $(0.25)^{3}$. $(0.75)^{7}$

= 9! / 2! (9 – 2)! . 0.0156 . 0.1335

= 36 . 0.0156 . 0.1335

= 0.075

Jadi probabilitas diperlukannya 10 ekor tikus putih untuk 3 ekor tikus yang terserang penyakit adalah 0.075 atau 7.5%

4. Distribusi Geometrik

Misalkan kita mempunyai usaha Bernoulli dengan $P(S) = p$ dan $P(G) = q = 1 - p$

Usaha ini kita ulang sampai mendapatkan sukses pertama

$x = 1$	G	$\rightarrow$	$P(x=1) = p$
$x = 2$	GS	$\rightarrow$	$P(x=1) = qp$
$x = 3$	GGS	$\rightarrow$	$P(x=1) = q^{2}p$
$x = 4$	GGGS	$\rightarrow$	$P(x=1) = q^{3}p$

$$\underbrace{G \quad G \quad G \quad \ldots\ldots G \quad G \quad S}_{x}$$

Secara umum $P(x = x) = f(x) = q^{x-1}.p$ x=1, 2, …

Contoh:

Suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata 1 diantara 100 butir hasil produksi cacat. Berapa probabilitas memeriksa 5 butir dan baru menemukan yang cacat pada yang ke lima?

P(S) = 0,01

○	○	○	○	○
B	B	B	B	C

P(x=5) = $(0,99)^4 \cdot (0,01)$

5. Distribusi Hipergeometrik

Bila suatu populasi berukuran N terdiri atas k unsur yang diharapkan muncul (berhasil) dan (N-k) unsur yang tidak muncul (gagal), pencuplikan n contoh adalah populasi berukuran N, probabilitas mendapatkan x yang diharapkan mengikuti fungsi hipergeometrik. Disini semua pengambilan contoh dianggap mempunyai probabilitas terpilih yang sama dan banyaknya kombinasi yang berukuran n dari suatu populasi berukuran N adalah (N n). Analog dengan ini adalah untuk memilih x keberhasilan dari k keberhasilan yang tersedia terdapat (k x) macam kombinasi. Sedangkan banyaknya kombinasi kegagalan dari (n – k) adalah (N-k, n-x). Dengan demikian, banyaknya contoh yang memenuhi syarat diantara kombinasi (N n) adalah (N n) (N-k n-x).

Fungsi probabilitas distribusi hipergeometrik dapat ditentukan dengan :

$$P(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

x = 0, 1, 2, . . . , n dan faktor-faktor di ruas kanan ditentukan oleh Rumus kombinasi

Rata-rata distribusi hipergeometrik, μ = nk/N.

Contoh Soal:
Sekelompok manusia terdiri atas 50 orang dan 3 di antaranya lahir pada tanggal 1 Januari. Secara acak diambil 5 orang. Berapa peluangnya di antara 5 orang tadi:

a) tidak terdapat yang lahir tanggal 1 Januari ?

b) tidak lebih dari seorang yang lahir pada tanggal 1 Januari?

Penyelesaian :

a) Ambil x = banyak orang di antara n = 5 yang lahir pada tanggal 1 Januari. Maka dengan N = 50, D = 3, Rumus VIII(10) memberikan :

$$P(0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}724$$

Peluang = 0,724 bahwa kelima orang itu tidak lahir pada tanggal 1 Januari.

b) Tidak lebih dari seorang yang lahir pada 1 Januari, berarti x = 0 dan x = 1.
P(0) sudah dihitung di atas.

$$P(1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{47}{4}}{\binom{50}{5}} = 0{,}253$$

6. Distribusi Poisson

Jika variabel acak $X \sim b(n,p)$ dengan n yang besar sekali ($n > 50$) dengan p kecil sekali ($p < 0.01$), maka $np \to \mu$, dimana μ adalah bilangan positif. Sehingga X dalam hal ini akan berdistribusi Poisson $X \sim p(\mu)$ atau $p(x| n,p)$.

Hasil pengamatan terhadap peristiwa yang jarang terjadi akan berditribusi Poisson. Peristiwa yang jarang terjadi tersebut ditunjukkan oleh probabilitasnya yang sangat kecil. Sehingga untuk ruang pengamatan yang kecil (n kecil), maka peristiwa tersebut sangat kecil kemungkinannya untuk teramati. Peristiwa tersebut akan teramati jika ruang pengamatannya diperbesar (n diperbesar). Misalkan, kita akan mengamati jumlah orang yang terkena kanker. Diketahui bahwa insidensi seseorang terkena penyakit kanker adalah sangat kecil, misalnya satu per sepuluh ribu orang ($p = 0.0001$). Sehingga jika pengamatan dilakukan terhadap semua orang yang ada di lingkungan anda (fakultas) yang berjumlah 3 ribu orang, maka kemungkinan anda menemukan jumlah orang yang terkena kanker secara rata-rata sebanyak $\mu = 0.0001 \times 3000 = 0.3$ orang. Jika ruang pengamatan diperbesar, pengamatan dilakukan terhadap semua orang di lingkungan anda (universitas) yang berjumlah 25 ribu orang, maka kemungkinan anda menemukan jumlah orang yang terkena kanker secara rata-rata sebanyak μ = 0.0001 x 25000 = 2.3 orang. Demikian pula jika ruang pengamatan diperbesar lagi, misalnya semua orang di lingkungan anda (provinsi) yang berjumlah 5 juta orang, maka kemungkinan anda menemukan jumlah orang yang terkenan kanker secara rata-rata sebanyak μ = 0.0001 x 5000000 = 500 orang

Fungsi probabilitasnya adalah : $P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$; $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = 1$$

Rata-rata dari variabel acak X : $\mu_X = E(X) = np = \mu$

Standar deviasinya : $\sigma_X = \sqrt{\mu}$

Dalam kehidupan sehari-hari, peristiwa yang mengikuti distribusi poisson adalah peristiwa-peristiwa yang jarang terjadi atau teramati dalam ruang pengamatan yang relatif sedikit, misalnya observasi mengenai jumlah orang yang terkena penyakit kanker, observasi mengenai jumlah pesawat yang bertabrakan di udara, terjadinya krisis moneter, terjadinya hyperinflation, dsb.

Contoh Soal :

Seorang pengusaha fotocopy menjamin bahwa dalam setiap 1000 lembar hasil fotocopy nya akan ada rata-rata 16 lembar yang rusak. Kalau saudara memintanya untuk memfotocopy 30 lembar, maka berapakah probabilitasnya saudara mendapatkan :

(a) Tidak ada yang rusak
(b) Lebih dari 5 lembar yang rusak
(c) Kurang dari 4 lembar yang rusak

Jawab :

Misalkan X adalah variabel acak yang menunjukkan jumlah lembar fotocopy yang rusak

$\mu = 16$ $n = 30$ $p = 16/1000 = 0.016$ $X \sim p(16) \rightarrow P(X = x) = \frac{16^x e^{-16}}{x!}$

(d) $P(X = 0) = \dfrac{16^0 e^{-16}}{0!} = e^{-16} = 1.125 x 10^{-7} = 0.000000125$

(e) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + \ldots\ldots$

$= 1 - P(X=0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5)$

$P(X = 0) = 1.125351747 \times 10^{-7}$

$P(X = 1) = \dfrac{16^1 e^{-16}}{1!} = 16e^{-16} = 1.800562796 x 10^{-6}$

$P(X = 2) = \dfrac{16^2 e^{-16}}{2!} = 1.440450236 x 10^{-5}$

$P(X = 3) = \dfrac{16^3 e^{-16}}{3!} = 7.682401261 x 10^{-5}$

$P(X = 4) = \dfrac{16^4 e^{-16}}{4!} = 3.072960504 x 10^{-4}$

$P(X = 5) = \dfrac{16^5 e^{-16}}{5!} = 9.833473613 x 10^{-4}$

$P(X > 5) = 1 - 0.00138 = 0.99862$

(f) $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= 9.314161294 \times 10^{-5} = 0.000093$