METODE NUMERIK

Tim Dosen:
Dr. Julan Hernadi, M.Si
Dr. Burhanudin A N, M.Sc
Dr. Puguh W Prasetyo, M.Sc
Siti Nur Rohmah, M.Pd

Tujuan dan Deskripsi Mata Kuliah

Mata Kuliah ini berkenaan dengan metode-metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan model matematika yang tidak dapat diselesaikan secara eksak atau analitik. Versi modern dari Metode Numerik adalah Komputasi Saintifik (scientific computing).

> *"Scientific computing is the collection of tools, techniques, and theories required to solve on a computer mathematical models of problems in science and engineering", (Golub & Ortega, 1992).*

Scientific computing encompasses:

- Hardware, i.e. computer, measurement devices.
- Mathematical background
- Algorithm and method
- Software

Kuliah ini dimaksudkan untuk membekali siswa dengan pengetahuan (knowledge) tentang metode aproksimasi dan keterampilan (skill) dalam mengimplementasikannya menggunakan komputer.

Sistem Perkuliahan

1. Kuliah direncanakan 14 kali pertemuan.
2. Semua materi kuliah (bahan kajian) terkait capaian pembelajaran yang ada wajib dipelajari.
3. Soal ujian dibuat seragam (terstandarisasi) untuk semua kelas mencakup aspek kognitif dan psikomotorik.
4. Metode Pembelajaran: Ceramah, diskusi, penemuan terbimbing melalui LKM, dan presentasi mahasiswa, serta laporan portofolio.
5. Tugas Kuliah:
    1. Tugas pekanan dikerjakan secara kelompok (sebanyak 12 kali)
    2. Tugas pre UTS dan pre-UAS secara individu (total ada 2 kali) 6.
6. Setiap awal kuliah dibacakan ayat-ayat Al-Qur'an oleh mahasiswa yang ditunjuk.
7. Sistem Penilaian:
    1. Kehadiran/presensi (10%)
    2. Tugas/portofolio (30%)
    3. UTS (20%) dan UAS (30%)
    4. Lainnya (keaktifan, catatan/ringkasan) (10%)

- Pemodelan matematika merupakan suatu proses di mana permasalahan pada dunia nyata disajikan dalam bentuk permasalahan matematika, seperti sistem persamaan linear, persamaan taklinear, persamaan diferensial yang memuat masalah nilai awal dan syarat batas, persamaan integral, masalah optimasi dan kontrol, dan lain sebagainya. Jadi, model matematika menggambarkan sistem dunia nyata dalam bahasa matematika.
- Permasalahan matematika tersebut perlu ditentukan solusinya karena solusi ini nantinya akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan nyata yang terkait.
- Dalam kasus solusi eksak (analitik) tidak ada maka perlu solusi aproksimasi (numerik).

Contoh 1: Menentukan panjang bahan baku atap gelombang

Figure: From flat to wave form

Diberikan material berupa plat tipis akan dibuat atap (genteng) gelombang dengan panjang 120 cm, kedalaman gelombang 1 cm dengan periode 2π cm (lihat gambar kiri). Berapa cm panjang bahan baku yang dibutuhkan. Setelah dibawa ke model matematika ternyata persamalahan ini ekuivalen dengan menentukan panjang kurva $y = f(x) = \sin x$ dari $x = 0$ s.d. $x = 120$. Berdasarkan kalkulus, panjang ini diberikan bentuk integral:

$$L = \int_0^{120} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^{120} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Ternyata integral ini tidak dapat diselesaikan dengan cara eksak sehingga perlu diaproksimasi dengan metode numerik. –> Aproksimasi intergal tertentu.

Contoh 2: Memprediksi Data Hilang

Tabel ini menyajikan jarak dan kecepatan sebuah mobil yang diukur setelah t detik dari berangkat

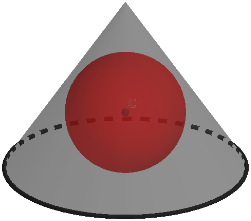
Waktu dari beangkat (detik)	0	3	6	8	12
Jarak (m)	0	75	130	210	325
Kec (m/sec)	25	29	31	27	26

Pertanyaan berikut tidak dapat dijawab langsung melalui data tabel.

- Di mana posisi mobil pada $t = 10$ detik?
- Pernahkah mobil melebihi kec 80 km/jam?

Jawaban hanya bisa diprediksi dengan menggunakan aproksimasi.–> interpolasi polinomial

- Model real: kita ingin membuat sebuah kerucut yang tingginya $t\ cm$ terbuat dari bahan tertentu. Kerucut yang terbentuk dibalik, kemudian diisi air sampai penuh. Selanjutnya ke dalamnya dimasukkan sebuah bola padat sampai tenggelam, sehingga sebagian airnya tumpah. Jika diinginkan panjang jari-jari bola setengah jari-jari alas kerucut, berapa jari-jari kerucut ini agar air yang tersisa adalah $v\ cm^3$. Lihat Gambar berikut.



- Temukan model matematika?[dijabarkan bersama di kelas]. Apa bisa diselesiaikan langsung?–> akar persamaan taklinear.

Strategies in Approximation

1. Replacing infinite processes with finite processes, such as replacing integrals or infinite series with finite sums.
2. Replacing complicated functions with simple functions, such as polynomials
3. Replacing nonlinear problems with linear problems
4. Replacing differential equations with algebraic equations
5. Replacing infinite-dimensional spaces with finite-dimensional spaces

Approximation scheme:
Original complicated problem $\rightarrow$ new simpler problem $\rightarrow$ solve approximately $\rightarrow$apply to original problem.
Ideally, the approximation solution of new problem is close enough to the original one.

The Source of Approximation Error

- **Before computation:**
  - **Modeling**: Some physical features of the problem or system under study may be simplified or omitted (e.g., friction, viscosity).
  - **Empirical measurements**: Laboratory instruments have finite precision. Their accuracy may be further limited by small sample size, or readings obtained may be subject to andom noise or systematic bias.
  - **Previous computations**: Input data may have been produced by a previous step whose results were only approximate.
- **During computation:**
  - **Truncation** or **discretization**: Some features of a mathematical model may be omitted or simplified (e.g., replacing a derivative by a difference quotient or using only a finite number of terms in an infinite series).
  - **Rounding**: The computer representation of real numbers and arithmetic operations upon them is generally inexact.

Example

The surface area of the Earth might be computed using the formula

$$A = 4\pi r^2$$

where r is the radius of Earth. Here, the using of formula is the process of approximation with several error sorces:

- The Earth is modeled as a sphere, is just an idealization; not really true.
- $r \approx 6375$km is based on previous computation, or empirical measurement.
- The number 3.14159265358979 is just an approximation for π in 15 digits, not exact.
- The input number into and output from computer has rounded by computer processor.

Galat, Galat Mutlak dan Galat Relatif

Definition

Misalkan p adalah nilai eksak yang akan diaproksimasi oleh p^*.

1. galat $= E := p - p^*$, yaitu selisih nilai eksak dari aproksimasinya.
2. galat mutlak $= E_M := |p - p^*|$, yaitu selisih mutlak antara eksak dan aprokimasinya.
3. galat relatif $= E_R := \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{\text{galat}}{\text{eksak}}$, perbandingan galat mutlak nilai yang diaproksimasi. Khusus galat relatif hanya terdefinisi bilamana $p \neq 0$.

Bila tanda nilai mutlak definisi ini diabaikan, diperoleh penjabaran sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\text{galat relatif} &= \frac{\text{eksak-aproksimasi}}{\text{eksak}} \\
(\text{galat relatif})\times(\text{eksak}) &= \text{eksak-aproksimasi} \\
\text{aproksimasi} &= \text{eksak}\times(1+\text{galat relatif}).
\end{aligned}$$

Contoh galat mutlak versus relatif

Si miskin membeli beras paket 10 kg, setelah ditimbang di rumah ternyata hanya ada 9 kg. Si kaya membeli beras paket 100 kg, diperoleh 95 kg. Pertanyaannya, beras siapa yang lebih banyak hilang? Dari aspek kebermaknaannya, beras siapa yang hilangnya lebih signifikan. Dalam hal ini kita mempunyai dua nilai eksak yaitu $p_1 = 10$ dan $p_2 = 100$ dan dua nilai aproksimasi yaitu $p_1^* = 9$ dan $p_2^* = 95$. Akibatnya, diperoleh

- Bagi si miskin: $E_M = |10 - 9| = 1$ kg dan $E_R = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$.
- Bagi si kaya: $E_M = |100 - 95| = 5$ kg dan $E_R = \frac{5}{100} = 0.05 = 5\%$.
  Berdasarkan hasil ini maka disimpulkan beras si kaya lebih banyak hilang yaitu 5 kg daripada beras si miskin yang hanya hilang 1 kg. Tetapi beras si miskin yang hilang lebih signifikan yaitu mencapai 10% daripada si kaya yang hanya 5%.

Contoh lanjutan (Opsional)

Misalkan nilai sangat kecil

$$x = e^{-16} = 0.1125351747 \times 10^{-6}$$

diaproksimasi oleh $x^* = 0$. Maka galat mutlak $E_M = |x - x^*| < 0.12 \times 10^{-6} = 1.2 \times 10^{-7}$ dan galat relatifnya $E_R = \frac{|x-x^*|}{|x|} = 1 = 100\%$. Dalam kasus ini, galat mutlak lebih baik dari galat relatif. Perhatikan kasus kedua, yaitu

$$z = e^{16} = 0.8886110521 \times 10^{7}.$$

Misal $z^* = 0.8886110517 \times 10^7$ sebagai aproksimasinya maka diperoleh $E_M = |z - z^*| = 4 \times 10^{-3}$ tidak cukup kecil padahal kedua nilai ini sudah cocok sampai dengan 9 digit desimal. Untuk galat relatifnya, $E_R = \frac{|z-z^*|}{|z|} = \frac{4\times10^{-3}}{0.8886110521\times10^{7}} = 0.4501 \times 10^{-9}$ yang menunjukkan bahwa kedua bilangan sudah sama sampai 9 digit desimal. Dalam hal ini galat relatif lebih informatif.

Permasalahan komputasi dikatakan sensitif atau berkondisi buruk (*ill-conditioned*) jika terjadi perubahan kecil pada data masukan menyebabkan perubahan sangat besar pada penyelesaiannya. Sensitivitas diukur oleh bilangan kondisi. Sebagai contoh menghitung nilai fungsi f pada x dan $\hat{x}$ yang dekat dengan x:

$$\text{cond} = \frac{|\text{perubahan relatif pada penyelesaian}|}{|\text{perubahan relatif pada data masukan}|} = \frac{\left|\frac{f(\hat{x})-f(x)}{f(x)}\right|}{\left|\frac{\hat{x}-x}{x}\right|}$$

Semakin besar nilai bilangan kondisi (cond) ini semakin buruk kondisi permasalahan komputasi.

Contoh ill-conditioned (Opsional)

Misalkan $h > 0$ sangat kecil, perhatikan x dan $\hat{x} := x + h$. Berdasarkan kalkulus:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x),$$

Galat mutlak $E_M = |f(x+h) - f(x)| \approx |hf'(x)|$. Misalkan akan dihitung nilai $f(x) = \cos(x)$ untuk x disekitar $\pi/2$. Perhatikan $f'(x) = \sin(x)$ dan $\sin(x) \approx 1$ pada $x \approx \pi/2$, diperoleh galat $\cos(x+h)$ sebagai berikut.

$$E_M = |\cos(x+h) - \cos(x)| \approx |h \sin(x)| \approx |h|$$

$$E_R \approx \frac{h \sin(x)}{\cos(x)} = h \tan(x).$$

Contoh: $x = 1.57079 \approx \pi/2$ dan $h = -0.00001$ sehingga $x + h = 1.57078$. Dalam hal ini perubahan relatif data masukan hanya $\frac{0.00001}{1.57079} \approx 0.00064\%$. Diperoleh

$$\cos(x) = \cos(1.57079) = 0.63267949 \times 10^{-5} \text{ dan}$$

$$\cos(x+h) = \cos(1.57078) = 1.63267949 \times 10^{-5}$$

sehingga perubahan relatif pada nilai fungsi sebesar $\frac{(1.63267949 - 0.63267949) \times 10^{-5}}{0.63267949 \times 10^{-5}} = 1.58 = 158\%$. Diperoleh: cond $= \frac{158}{0.00064} \approx 248148 \rightarrow$perubahan relatif nilai fungsi 248148 kali lebih besar dari perubahan relatif data masukan.

Tugas Pekanan ke-1

1. Mengapa perlu adanya teori aproksimasi, khususnya metoda numerik? Berikan ilustrasi atau contoh yang berbeda dari buku ini untuk menjelaskan alasan Anda.
2. Mengapa galat relatif umumnya lebih informatif daripada galat mutlak. Dalam kasus apa galat relatif lebih baik daripada galat mutlak. Sebaliknya, dalam kasus apa galat mutlak lebih baik daripada galat relatif.
3. Jelaskan masalah kritis yang ada ada kasus bola di dalam kerucut. Bagaimana solusi masalah kritis ini? (lihat buku hal 3).
4. Salah satu strategi aproksimasi adalah mengganti fungsi rumit menjadi fungsi sederhana sebagai aproksimasinya. Salah satu fungsi sederhana yang banyak digunakan dalam metode aproksimasi adalah polinomial. Jelaskan alasannya.
5. Pada aproksimasi luas permukaan bumi diketahui jari-jari bumi $r \approx 6375$km.
   1. Berikan pendapat Anda bagaimana orang mengukur jari-jari bumi.
   2. Seandainya 2/3 dari permukaan bumi adalah lautan dan asumsikan 50% dari daratan bisa dihuni oleh manusia. Jika kepadatan ideal adalah 10 orang per km2, berapa kira2 banyak manusia yang bisa hidup di bumi Allah ini.