Bab 2. APROKSIMASI AKAR PERSAMAAN TAKLINEAR

Tim Dosen:
Julan HERNADI, Puguh, Burhan, Siti

Prodi Pendidikan Matematika
FKIP UAD Yogyakarta

Persamaan Linear vs Persamaan Taklinear

Persamaan linear satu variabel berbentuk: $ax + b = c$, $a \neq 0, b, c$ konstanta dan x variabel. Penyelesaiannya adalah $x = \frac{c-b}{a}$. Apa yang terjadi jika syarat $a \neq 0$ tidak dipenuhi.

Lihat buku hal 33-34, lalu jawablah pertanyaan apersepsi berikut:

1. Bagaimana interpretasi geometris penyelesaian (akar) persamaan linear $ax + b = c$ ini?
2. Dapatkan kita menyajikan persamaan ini ke dalam bentuk $g(x) = 0$, apakah fungsi g yang sesuai?
3. Jika data pada Contoh 2.1, diganti secara umum: biaya buka pintu a rupiah, biaya per km b rupiah, dan total biaya c rupiah, nyatakan permasalahan ini ke dalam model matematika (persamaan linear).
4. Apakah yang dimaksud fungsi linear. Apa beda fungsi linear dan persamaan linear?
5. Apa definisi persamaan taklinear? Apa definisi akar (penyelesaian) persamaan taklinear.

- **Persamaan kuadrat**

$$ax^2 + bx + c = 0, \;\; a \neq 0,$$

penyelesaiannya $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Kapan penyelesaian ini bernilai real? Berapa banyak akarnya?

- **Persamaan suku banyak atau polinomial**

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0, \;\; a_n \neq 0.$$

Persamaan polinomial ini paling banyak mempunyai n akar berbeda. Apa maksud paling banyak di sini?

- **Persamaan trigonometri**

$$\sin x - 1 = 0$$

mempunyai penyelesaian yang berbentuk $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ dengan k bilangan bulat sebarang. Berapa banyak akar persamaan ini?

- **Persamaan eksponensial**

$$x^2 + e^{-x} = 0.$$

Persamaan ini tidak mempunyai akar, jelaskan mengapa?

1. Bentuk persamaan taklinear sangat beragam.
2. Eksistensi akar persamaan taklinear sulit dideteksi.
3. Banyaknya akar persamaan taklinear sulit dipastikan.
4. Umumnya akar persamaan taklinear tidak mempunyai formula eksplisit seperti pada persamaan kuadrat.

Sebagai ilustrasi pada Contoh 1.2, kita harus menentukan jari-jari kerucut r yang memenuhi persamaan

$$-\frac{1}{6}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 t - v = 0$$

di mana v diketahui volum air sisa. Begitu juga pada Contoh 2.3 kita harus menentukan angka pertumbuhan populasi λ melalui

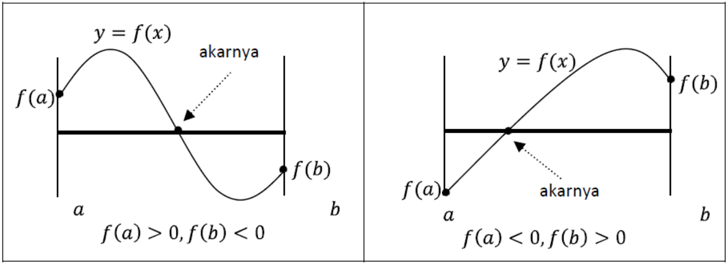
$$1000\lambda e^{\lambda} - 1025\lambda - 435 = 0.$$

Langkah pertama yang harus dilakukan sebelum menentukan akar adalah memastikan ada tidaknya akar tersebut. Jika akarnya tidak tunggal maka perlu dipilih akar mana yang memenuhi permasalahan realnya.

Theorem

Bila fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *kontinu pada interval* $[a, b]$ *dan* $f(a)f(b) < 0$ *maka terdapat* $c \in (a, b)$ *sehingga* $f(c) = 0$, *yakni* c *merupakan akar persamaan taklinear* $f(x) = 0$.

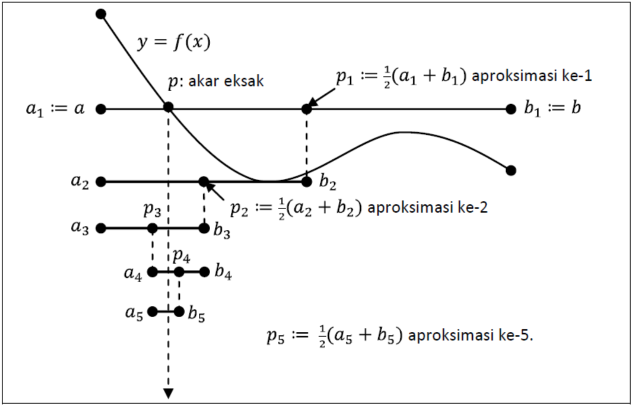
Berikut penjelasan geometris teorema ini: Akar persamaan $f(x) = 0$ adalah absis titik potong kurva $y = f(x)$ dengan sumbu X.



Ada 2 syarat cukup pada teorema ini, yaitu f kontinu dan $f(a)f(b) < 0$. Apa yang terjadi jika syarat cukup ini tidak terpenuhi? Jelaskan dengan ilustrasi grafis! (lihat buku hal 36-37).

Metode Bagidua (Bisection)

Ide dasar: membagi interval yang memuat akar menjadi dua bagian yang sama panjang, kemudian mempertahankan subinterval yang memuat akar dan membuang subinterval interval lainnya. Proses ini dilakukan terus-menerus.



Susun algoritmanya, kemudian terapkan pada Contoh 2.4 pada buku teks.

Dua pertanyaan berkenaan dengan algoritma metode bagidua ini.

1. Bila iterasi dihentikan pada langkah ke N, dapatkah kita memberikan estimasi kesalahannya yaitu selisih jarak $|p_N - p|$ di mana p akar eksaknya.
2. Bila diinginkan aproksimasi dengan kesalahan tidak melebihi toleransi TOL yang diberikan, berapa banyak iterasi N yang dibutuhkan.

Kriteria yang digunakan untuk menentukan banyak iterasi disebut kriteria stopping.
Berikut teorema yang memberikan kriteria stopping pada metode bagidua:

Theorem

Misalkan persamaan taklinear $f(x) = 0$ mempunyai akar di dalam interval $[a, b]$ dengan akar eksak p. Bila (p_n) barisan aproksimasi yang diperoleh dengan metode bagidua maka berlaku

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad \textit{untuk setiap } n \geq 1. \tag{1}$$

Jabarkan bukti teorema ini, kemudian tarik kesimpulan apa yang diperoleh dari teorema ini. Berikan interprestasinya. Terapkan pada Contoh 2.5.

Tugas Pekan ke-3

1. Apa saja kelebihan dan kekurangan metode bagidua ini.
2. Tulisakan permasalahan kritis yang ada pada metode ini.
3. Terapkan metode bagidua untuk persamaan taklinear berikut:
    1. $x^3 - x - 4 = 0$ pada interval $[1, 3]$.
    2. $x \sin x - 1 = 0$ pada interval $[1, 3]$. Sebelumnya deteksi dulu eksistensi akar pada interval $[1, 2]$ dan $[2, 3]$.

Konfirmasikan hasil Anda dengan cara menggambar grafik fungsi terkait, misalnya dengan GeoGebra/Matlab.