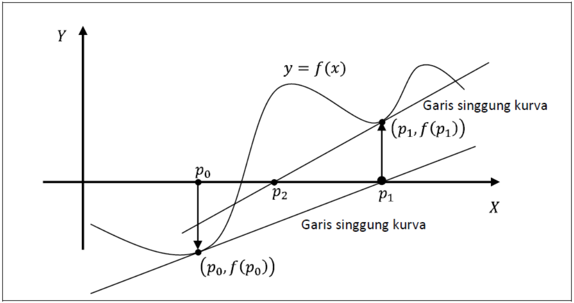
Metode Newton menggunakan garis tangen (garis singgung) kurva di sebuah titik pada kurva tersebut. Absis titik potong garis tangen ini dengan sumbu X ditetapkan sebagai nilai aproksimasi.



Ambil sebarang p_0, temukan persamaan garis tangen di $x = p_0$. Tentukan titik potong garis ini dengan sumbu X untuk memperoleh p_1. Secara umum, untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$ diperoleh rumus sbb:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}. \qquad (3)$$

Contoh 2.8 dan 2.9

Contoh 2.8: Hitunglah aproksimasi akar persamaan $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ dengan menggunakan metode Newton. Gunakan berbagai nilai awal p_0.

- Perlu dipersipkan dulu $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dan $f'(x) = 3x^2 + 8x$.
- Mulai dengan memilih starting point, misalnya $p_0 = 1.5$. Dengan menggunakan formula (3) secara rekursif maka diperoleh nilai p_1, p_2, dan p_3.
- Gunakan nilai awal lainnya, misalkan $p_0 = 1$. Bagaiman nilai p_1, p_2, dan p_3 yang dihasilkan. Apa yang dapat disimpulkan dari kedua nilai awal ini.
- Bolehkah diambil nilai awal $p_0 = 0$? Mengapa?

Contoh 2.9: Diberikan persamaan taklinear $e^x - 2 = 0$. Buktikan persamaan ini memiliki akar pada interval $[0, 1]$, kemudian terapkan metode Newton dengan nilai awal $p_0 = 0$ untuk menentukan p_1, p_2, p_3, dan p_4. Bandingkan kecepatan konvergensinya terhadap metode bagidua, secant dan false-position.

- Pembahasannnya lihat buku teks hal 62.
- Apa yang dapat disimpulkan dari ke-4 metode tersebut?

Masalah Kritis Metode Newton

1. Pemilihan nilai awal iterasi pada metode Newton sangat menentukan kekonvergenan barisan aproksimasinya. Sejauh ini belum ada teori implementatif dalam memilih nilai awal ini yang menjamin barisan aproksimasinya konvergen.
2. Terdapat dua macam kesalahan fatal dalam memilih nilai awal. Pertama, iterasi tidak berjalan karena ada suku pada formula iterasi tidak terdefinisi. Formula iterasi tidak berjalan ketika $f'(p_n) = 0$ atau $f(p_n)$ tidak terdefinisi. Kasus di mana $f(p_n)$ tidak terdefinisi terjadi pada persamaan
$$\frac{4}{3}e^{(2-x/2)}(1 + x^{-1}\ln x) = 0.$$
(lihat buku teks hal 63).
3. Secara teoretis, metode Newton terjamin konvergen jika nilai iterasi awal dipilih "cukup dekat" dengan akar eksak. Sayangnya akar eksak ini tidak diketahui pada awal iterasi sehingga teori ini tidak dapat diimplementasikan pada komputasi numerik.

Metode Iterasi Titik Tetap (Fixed-Point)

Ide dasar metode ini adalah dengan mengubah bentuk umum persamaan taklinear

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

menjadi bentuk lain yang ekuivalen, yaitu

$$x = \phi(x). \tag{5}$$

Ekuivalen di sini artinya kedua persamaan mempunyai akar yang sama. Selanjutnya untuk suatu nilai awal x_0 tertentu, didefinisikan iterasi berikut

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \;\; n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6}$$

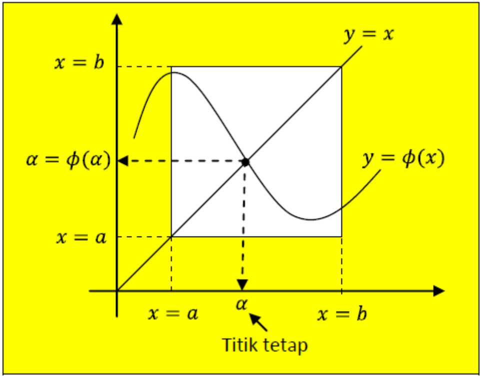
Theorem

Bila ϕ kontinu dan (x_n) barisan yang dibangun oleh iterasi (6) konvergen maka ia konvergen ke akar persamaan taklinear (4).

Bukti: Lihat buku hal 69. Intinya, jika $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ maka diperoleh $\alpha = \phi(\alpha)$ yang ekuivalen dengan $f(\alpha) = 0$ yakni α adalah akar. Selanjutnya α yang bersifat $\alpha = \phi(\alpha)$ disebut titik tetap ϕ.
Dalam hal ini kita katakan barisan iterasi (6) konvergen ke titik tetap ϕ asalkan titik tetap ini ada.

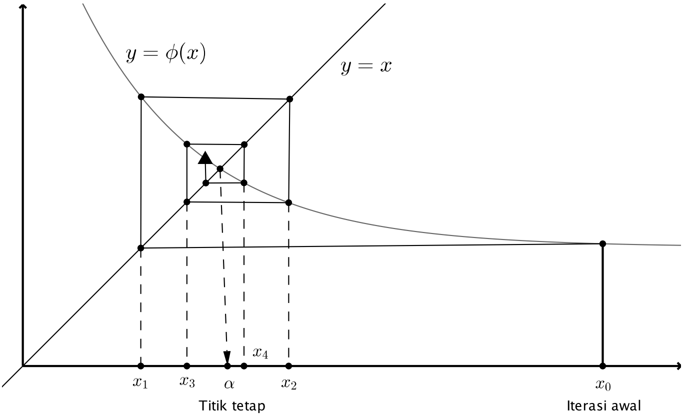
Ilustrasi Geometris Titik Tetap

- Secara geometris, titik tetap ϕ adalah absis titik potong kurva $y = \phi(x)$ dengan garis $y = x$. Perhatikan Gambar 2.17 hal 70



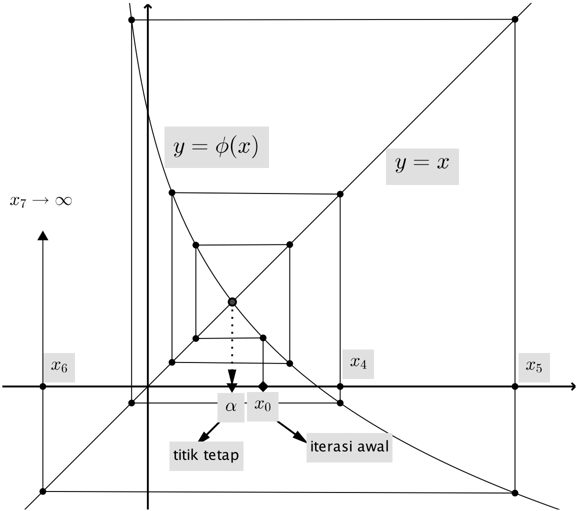
- Dalam kasus kurva dan garis ini tidak berpotongan maka ϕ tidak mempunyai titik tetap.
- Adanya titik tetap merupakan syarat perlu iterasi konvergen. Artinya, ada kasus di mana terdapat titik tetap tapi iterasi tidak konvergen.

Titik Tetap Ada dan Konvergen: Pola Spiral



Perhatikan $x_0, x_1, x_2, \cdots$ semakin lama semakin mendekati titik tetap α.

Titik Tetap Ada tetapi Divergen



Perhatikan $x_0, x_1, x_2, \cdots$ semakin lama semakin semakin menjauhi titik tetap α.

Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap

- Teorema Eksitensi: Jika ϕ kontinu pada $[a, b]$ dan $\phi(x) \in [a, b]$ maka mempunyai ϕ mempunyai titik tetap di dalam $[a, b]$.
- Ketunggal: Jika ϕ memenuhi kondisi seperti pada Teorema Eksistensi dan terdiferensial pada interval terbuka (a, b) dengan $|\phi'(x)| < 1$ untuk setiap $x \in (a, b)$ maka ϕ memiliki titik tetap tunggal.

Example

Perhatikan persamaan taklinear $x + \ln x = 0$. Selesaikan persamaan ini dengan menggunakan iterasi titik tetap.

Persamaan ini dapat ditulis dalam beberapa bentuk yang ekuivalen, di antaranya sebagai berikut

$$x = -\ln x,\ x = e^{-x},\ x = (x + e^{-x})/2.$$

Jadi dalam kasus ini kita mempunyai fungsi iterasi, yaitu $\phi_1(x) := -\ln x$, $\phi_2(x) := e^{-x}$ dan $\phi_3(x) := (x + e^{-x})/2$. Temukan aproksimasi yang diperoleh melalui 3 fungsi iterator ini, bagaimana kekonvergenannya?. Selidiki kaitannya dengan titik tetap masing-masing fungsi ϕ_1, ϕ_2, dan ϕ_3.

Tugas Pekan ke-5

1. Tuliskan kelemahan metode Newton.
2. Dalam menjalankan iterasi metode Newton, apa kriteria stopping yang dapat digunakan?
3. Kerjakan soal no 5 hal 83.
4. Kerjakan no 6 hal 84.
5. Kerjakan no 10 hal 85.