Idenya adalah menyajikan polinomial interpolasi untuk pasangan titik (x_k, y_k), dengan $y_k = f(x_k), k = 0, 1, 2, \cdots, n$ ke dalam bentuk

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \quad (6)$$

Selanjutnya koefisien $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ ditentukan agar dipenuhi syarat $P_n(x_k) = y_k = f(x_k)$. Salah satu caranya adalah dengan metode rekursif sbb:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= a_0 \\
P_1(x) &= P_0(x) + a_1(x - x_0) \\
P_2(x) &= P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&\vdots \\
P_n(x) &= P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Untuk jelasnya, pahami Teorema 3.2 dan Contoh 3.7.

SELISIH TERBAGI

Definisi: Misalkan ada $n+1$ buah pasangan titik (x_i, y_i) dengan $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$ untuk sebuah fungsi f yang diketahui, maka diperoleh selisih terbagi sebagai berikut.

- **selisih terbagi tingkat nol**, ada $n+1$ nilai, yaitu $f[x_i] := f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$. Selisih terbagi tingkat nol tidak lain adalah nilai fungsi f di titik x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$.
- **selisih terbagi tingkat 1**, ada n nilai yaitu $f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.
- **selisih terbagi tingkat 2**, ada $n-1$ nilai yaitu $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$, $i = 0, 1, \cdots, n-2$.
- **selisih terbagi tingkat** k untuk titik $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ yang diberikan oleh

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- **selisih terbagi tingkat** n hanya ada satu nilai yaitu

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] := \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Total ada $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ nilai selisih terbagi.

TABEL SELISIH TERBAGI

x	tingkat nol	tingkat satu	tingkat dua	tingkat tiga
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Table: Daftar selisih terbagi

Teorema 3.3: Jika diberikan node $x_0, x_1, \cdots, x_n$ dan pasangannya $y_0, y_1, \cdots, y_n$ dengan $y_i = f(x_i)$ maka polinomial yang didefinisikan sebagai berikut

$$P_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{7}$$

dengan $a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ maka berlaku $P_n(x_k) = y_k$, untuk setiap $k = 0, 1, 2, \cdots, n$. Selanjutnya polinomial ini disebut **formula selisih bagi Newton**.

Diketahui pasangan data:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

Diperoleh tabel selisih terbagi sebagai berikut:

x_i	Tingkat nol	Tingkat satu	Tingkat dua	Tingkat tiga	Tingkat empat
0.0	**1.0000**				
0.2	1.2214	**1.1070**			
0.4	1.4918	1.3520	**0.6125**		
0.6	1.8221	1.6515	0.7487	**0.2270**	
0.8	2.2255	2.0170	0.9137	0.2750	**0.0600**

Karena ada 5 pasangan titik maka dapat dibangun polinomial interpolasi derajat 4, berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 1 + 1.1070(x-0) + 0.6125(x-0)(x-0.2) + 0.2270(x-0)(x-0.2) \\ &\quad (x-0.4) + 0.0600(x-0)(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6). \end{aligned}$$

Tabel selisih terbagi di atas dapat digunakan untuk membangun polinomial interpolasi untuk node lainnya. Caranya, cukup identifikasi node $x_0, x_1, x_2, \cdots$ yang bersesuaian, kemudian gunakan Teorema 3.3. Untuk jelasnya, bahas Contoh 3.9 pada buku teks. Misalkan diambil node 0.6 dan 0.8 berkaitan dengan interpolasi linear untuk $x_t = 0.75$ maka tetapkan $x_0 = 0.6$ dan $x_1 = 0.8$.

- Apakah hasil yang diperoleh melalui metode selisih terbagi sama dengan metode Lagrange?
- Apakah metode selisih terbagi lebih praktis daripada metode Lagrange?

Formula Galat Polinomial Interpolasi

Ketika polinomial interpolasi P_n digunakan untuk mengaproksimasi fungsi f maka akan terjadi galat aproksimasi. Galat ini diberikan oleh formula berikut:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{8}$$

di mana ξ suatu titik dalam $[a, b]$ dan bergantung pada x.

Contoh 3.10: Diberikan node $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ dan $x_2 = 0.9$. Hitunglah estimasi galatnya jika polinomial interpolasi derajat 2 digunakan untuk mengaproksimasi nilai $\ln(1.45)$, bandingkan dengan galat faktualnya jika nilai eksak 5 digitnya adalah $\ln 1.45 = 0.37156$. Setelah dihitung diperoleh:

$$P_2(x) = 0.783333(x - 0) - 0.23333(x - 0)(x - 0.6)$$

Galat faktual: $E_{nyata} = |P_2(0.45) - f(0.45)| = |0.36825 - 0.37156| = 0.003312$. Diperoleh $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. Berdasarkan (8), diperoleh estimasi berikut

$$|f(0.45)-P_2(0.45)| = \frac{1}{3!}\frac{2}{(1+\xi)^3}|(0.45-0)(0.45-0.6)(0.45-0.9)| = \frac{0.010125}{(1+\xi)^3}.$$

Karena $\xi \in [0, 1]$ maka $\frac{1}{(1+\xi)^3} \leq \frac{1}{(1+0)^3} = 1$. Batas atas galatnya adalah

$$|f(0.45) - P_2(0.45)| = \frac{0.010125}{(1+\xi)^3} \leq 0.010125,$$

masih di bawah galat faktual.