5.2 APROKSIMASI DERIVATIF

5.2 Aproksimasi Derivatif

Pada pelajaran kalkulus telah diketahui bahwa derivatif fungsi f di titik x_0 ditulis $f'(x_0)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x_0) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Sepanjang limit ini ada. Jika limit ini tidak ada maka dikatakan derivatif f dan x_0 tidak ada. Devinisi ini biasanya dipakai sebagai dasar untuk membangun skema aproksimasi derivatif, yaitu melalui formula

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Teorema 5.1. Andaikan $f \in C^n[a,b]$ dan $f^{(n+1)}$ ada pada $[a,b]$. Misalkan $x_0 \in [a,b]$.
Untuk setiap $x_0 \in [a,b]$ selalu ada $\xi(x)$ di antara x_0 dan x sehingga

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^2 + R_n(x)}_{P_n(x)}$$

di mana $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ disebut suku sisa.

Bukti. Lihat Bartle dan Sherbert (1993) dalam (1).

5.2.1 Aproksimasi Derivatif Pertama Formula Dua Titik

Formula ini menggunakan dua titik x dan $x_0 + h$, atau $x_0 - h$ dan x_0 untuk mengaproksimasi nilai $f'(x_0)$. Pada ekspansi tailor diambil $x = x_0 + h, h > 0$ dan $n = 1$ sehingga diperoleh

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

Untuk suatu $\xi \in (x_0,\ x_0 + h)$. Setah persamaan ini diselesaikan untuk $f'(x_0)$ diperoleh

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Diperoleh aproksimasi selisih maju (forward difference)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dengan kesalahan $E = -\frac{f''(\xi)}{2}h$. jadi formula ini memberikan order konvergensi $\mathcal{O}(h)$. Bila diambil $x = x_0 - h$ diperoleh

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h$$

Untuk suatu $\xi \in (x_0 - h, x_0)$ dieperoleh aproksimasi selisih mundur (backward difference)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h}$$

Dengan kesalahan $E = -\frac{f''(\xi)}{2}h$,yang juga memberikan order konvergensi $\mathcal{O}(h)$.

Formula tiga titik

Pada Teorema Taylor, diambil $x = x_0 + h$ dan $n = 2$ untuk memperoleh ekspansi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f''(\xi_1)}{6}h^3$$

Untuk suatu $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$. Subtitusi $x = x_0 + h$ diperoleh ekspansi

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f''(\xi_2)}{6}h^3$$

Untuk $\xi_2 \in (x_0 - h, x_0)$. Dengan mengurangkn persamaan diatas diperoleh

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6}h^2$$

Dengan asumsi terdapat $\xi \in (x_0 - h,\ x_0 + h)$ sehingga $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = f'''(\xi)$ maka diperoleh

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \frac{f'''(\xi)}{6}h^2$$

Akhirnya, diperoleh formula aproksimasi

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

yang memberikan order konvergensi $\mathcal{O}(h^2)$. Dikatakan rumus tiga titik karena rumus ini hanya melibatkan tiga titik $x_0 - h, x_0$ dan $x_0 + h$ Sementara pada rumus akhir titik x_0 tidak muncul. Formula ini disebut juga aproksimasi selisih terpusat (centered difference).

Formula lima titik

Formula ini menggunakan lima titik dan memberikan kesalahan dengan order $\mathcal{O}(h^4)$. Ada 2 jenis formula lima titik ini, yaitu terpusat dan tepi. Untuk formula lima titik terpusat diberikan sebagai berikut.

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}(-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h))$$

Dengan kesalahan $E = \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \xi \in (x_0 - 2h,\ x_0 + 2h)$. Sedangkan formula lima titik tepi diberikan sebagai

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}(f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)$$

Dengan kesalahan $E = \frac{h^4}{3} f^{(5)}(\xi), \xi \in (x_0,\ x_0 + 4h)$.

Berdasarkan uaian diatas, formula lima titik memberikan order konvergensi paling cepat. Tetapi order konvergensi ini terjamin dapat dicapai jika fungsi f terdefinisi sampai tingkat kelima. Formula tiga titik hanya perlu terdeferensial sampai tingkat ketiga, segdangkan formula dua titik hanya dibutuhkan terdeferensial sampai tingkat kedua. Bila asumsi tingkat terdeferensialan ini tidak dipenuhi maka order konvergensi yang dimaksud tercapai. Artinya bisa tercapai bisa juga tidak.

Exercise

1. Diberikan data bentuk tabel sebagai berikut :

x	$f(x)$
1.3	3.669
1.5	4.482
1.7	5.474
1.9	6.686
2.1	8.166
2.3	9.974
2.5	12.182

(a) Hitunglah $f'(1.7)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $\mathcal{O}(h^2)$ dan $\mathcal{O}(h^4)$
(b) Hitunglah $f'(1.4)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $\mathcal{O}(h^2)$
(c) Rumus apa yang digunakan untuk menghitung $f'(1.3)$ dan $f'(2.5)$?
(d) Misalkan $f(x) = \cos x$

2. Gunakan formula pendekatan $f''(x)$ dengan $h = 0{,}01$ dan cai pendekatan untuk $f''(0{,}8)$. Gunakan 9 digit desimal dalam semua perhitungan

Link Video Materi

Link video materi Aproksimasi Derivatif dapat diakses pada:

https://www.youtube.com/watch?v=FmsvYUSsK94