5.3.3 Formula Kuadratur Bersusun

Penyusunan formula kuadratur bersusun untuk mengaproksimasi $\int_a^b f(x)\,dx$ didasarkan pada dua ide berikut, yaitu

Semakin sempit domain integral $[a, b]$ semakin teliti hasil aproksimasi yang diperoleh,

Bila domain integral $[a, b]$ dipartisi menjadi $x_0 := a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n := b$ maka berlaku

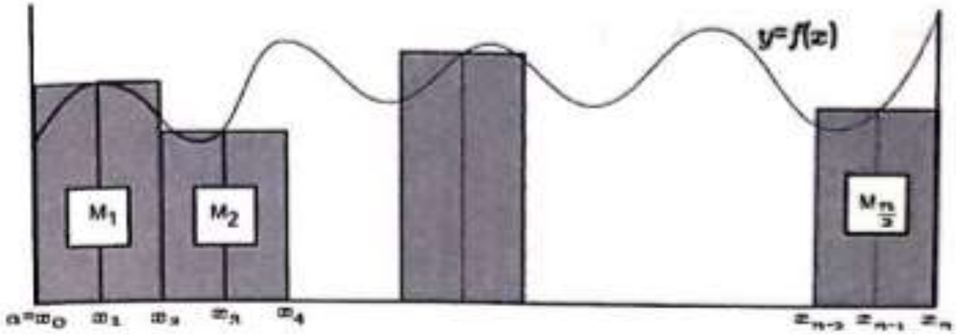
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0:=a}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots \int_{x_n-1}^{x_n:=b} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k:=1}^{x_k} f(x)\,dx$$

Metode midpoint bersusun

Perhatikan partisi seragam $x_0 \coloneqq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n \coloneqq b$, dimana $h = x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots n$. Disini ditetapkan n genap. Untuk setiap tiga absis berurutan dibentuk satu aproksimasi midpoint, yaitu

- melalui $x_0, x_1,$ dan x_2 diperoleh $M_1(f) = (x_2 -$



Gambar 5.5: Ilustrasi metode midpoint bersusun

Dengan menggabungkan semua hasil ini diperoleh formula untuk metode midpoint bersusun sebagai berikut

$$M(f) = 2h\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) \tag{5.19}$$

Ilustasi metode midpoint diberikan pada Gambar 5.5

Untuk mengetahui estimasi kesalahan, diberikan terlebih dahulu dua teorema berikut, yaitu teorema nilai antara (TNA) dan teorema nilai ekstrem (TNE).

Teorema 5.5 [Teorema Nilai Antara (TNA)] Bila f kontinu pada interval [a, b] dan K bilangan diantara $f(a)$ dan $f(b)$ maka terdapat bilangan c diantara a dan b sehingga $f(c) = K$

Bukti. Lihat Bartle dan Sherbet (1993) dalam [1]

Teorema 5.6 [Teorema Nilai Ekstrim (TNE)] Bila f kontinu dan terbatas pada interval [a, b] maka terdapat $c_{min}, c_{max} \in [a, b]$ sehingga $f(c_{min}) = min_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq f(c_{max}) = max_{x\in[a,b]} f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$

Bukti. Lihat Bartle dan Sherbet (1993) dalam [1]

Pada formula quadratur dasar, metode midpoint pada $[a, b]$ memberikan kesalahan $E = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$ dimana $\xi \in (a, b)$. Bandingkan jika diterapkan pada interval $[x_{k-2}, x_k]$ maka kesalahannya adalah $E_k = \frac{f'''(\xi)}{24}(b-a)^3 = E = \frac{f'''(\xi_k)}{3} h^3$. Ingat $x_k - x_{k-2} = 2h$.

Diasumsikan f'' kontinu pada $[a, b]$ maka diperoleh

$$\min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq f''(\xi_k) \leq \max_{x \in [a,b]} f''(x), k = 1, \dots, \frac{n}{2}$$

Di jumlahkan dari $k = 1$ sampai $k = \frac{n}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n/2} \min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq \sum_{k=1}^{n/2} f''(\xi_k) \leq \sum_{k=1}^{n/2} \max_{x \in [a,b]} f''(x)$$

$$\frac{n}{2} \min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq \sum_{k=1}^{n/2} f''(\xi_k) \leq \sum_{k=1}^{n/2} \max_{x \in [a,b]} f''(x)$$

$$\min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\xi_k) \leq \sum_{k=1}^{n/2} \max_{x \in [a,b]} f''(x)$$

Dengan asumsi $f^{''}$ kontinue pada $[a, b]$ maka dengan TNA terdapat $\mu \epsilon (a, b)$ sehingga $f^{''}(\mu) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2} f^{''}(\xi_k)$. Karena $n = \frac{b-a}{h}$ maka kesalahan dalam metode midpoint bersusun diperoleh sebagai berikut

$$= \sum_{k=1}^{n/2} E_k = \frac{h^3}{3}\sum_{k=1}^{n/2} f^{''}(\xi_k) = \frac{h^3}{3}\frac{n}{2}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2} f^{''}(\xi_k)\right)$$

$$= \frac{h^3}{6}\left(\frac{b-a}{h}\right) f^{''}(\mu)$$

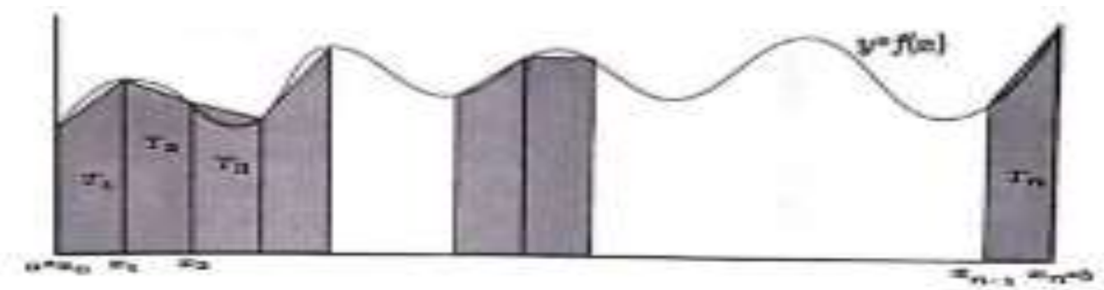
Jadi kesalahan pada metode midpoint bersusun ini adalah

$$E = \frac{(b-a)h^2}{h} f^{''}(\mu) \qquad (5.20)$$

Yakni memberikan kesalahan dengan order $(\mathcal{O}h^2)$. Perhatikan order konvergensinya turun 1 tingkat dari formula quadratur dasar. Fakta ini juga terjadi pada metode lainnya.

Metode trapesium bersusun

Perhatikan partisi seragam $x_0 := x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n := b$, dimana $h = x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots n$. Disini tidak disyaratkan n genap karena setiap dua absis berurutab dapat dubangun satu aproksimasi trapesium, sehingga secara total terdapat n buah aproksimasi trapesium $T_k, k = 1, \ldots, n$



Gambar 5.6: Ilustrasi metode trapesium bersusun

Untuk setiap k digunakan node x_{k-1} dan x_k. Diperoleh

$$\begin{aligned} T(f) &= T_1, T_2 + \cdots + T_n \\ &= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_2) + f(x_4)\right) + \cdots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\ &= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right) \end{aligned}$$

Karena $x_0 = a$ dan $x_n = b$ maka diperoleh metode trapesium bersusun sebagai berikut

$$T(f) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

Ilustrasi metode trapesium diberikan pada Gambar 5.6

Dengan menggunakan argumen seperti pada metode midpoint bersusun maka akan diperoleh estimasi kesalahan berikut

$$E = \frac{h^2}{12}\,(b-a)f''(\mu) \qquad (5.21)$$

Dimana μ suatu titik didalam (a, b). Perhatikan bahwa estimasi kesalahan ini hanya terjamin jika fungsi f terdiferensial sampai tingkat dua pada interval (a,b)

Metode Simspon

Karena dibutuhkan 3 titik untuk membangun 1 aproksimasi simpson maka dibutuhkan n genap pada pengambilan $a \coloneqq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n \coloneqq b$ dimana $h = x_i - x_{i-1}$ untuk setiap $i = 1,2, \dots n$. Dengan ide yang sama ketika menurunkan formula metode midpoint bersusun sebelumnya maka diperoleh tahapan aproksimasi berikut

- $S_1(f) = \frac{(x_2 - x_0)}{6}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)$
- $S_2(f) = \frac{(x_4 - x_2)}{6}\big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big) = \frac{h}{3}\big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big)$
- $S_3(f) = \frac{(x_6 - x_4)}{6}\big(f(x_0) + 4f(x_5) + f(x_6)\big) = \frac{h}{3}\big(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\big)$
- ….
- $S_{\frac{n}{3}}(f) = \frac{(x_n - x_{n-2})}{6}\big(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) = \frac{h}{3}(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-2}) +$

Selanjutnya semua nilai ini dijumlah untuk mendapatkan

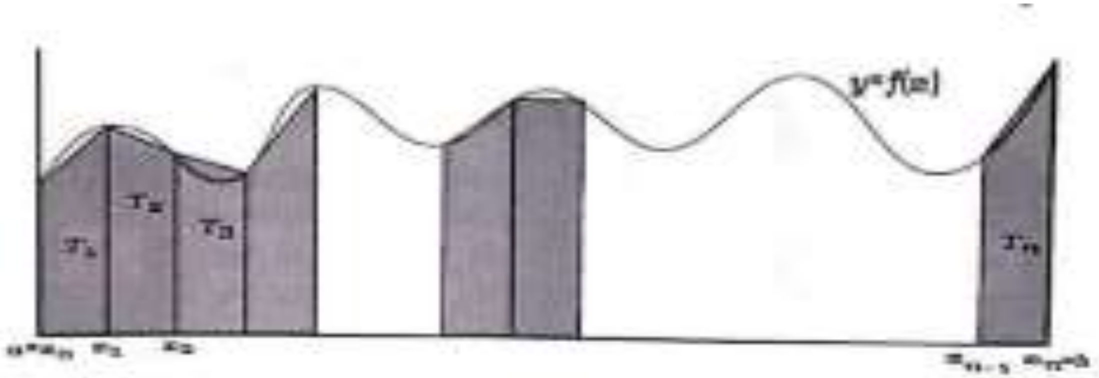
$$S(f) = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + 2f(x_2) + f(x_4) + \cdots f(x_{n-2}) + f(x_n)\big)$$

Akhirnya, metode simpson bersusun diberikan oleh formula

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f\ (x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f\ (x_{2k})\right) \tag{5.23}$$

Perhatikan dengan seksama bahwa ada pengelompokan nilai fungsi f pada *node* dengan indeks genap dan *node* dengan indeks ganjil.

Ilustrasi grafis metode Simspon ini diberikan pada Gambar. 5.7



Gambar 5.6: Ilustrasi metode trapesium bersusun

Dengan menggunakan argumen seperti pada metode midpoint bersusun maka akan diperoleh estimasi kesalahan untuk metode Simpson bersusun, yaitu

$$E = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\mu) \qquad (5.24)$$

Dimana μ suatu titik didalam (a,b). Estimasi kesalahan ini membutuhkan asumsi bahwa fungsi f terdiferensial sampai dengan titik keempat.

Exercise

$$\int_{0}^{2} x^2 e^{-x^2}\, dx$$

1. Aproksimasikanlah integral diatas dengan menggunakan $h = 0{,}25$ untuk metode trapesium bersusun

2. Aproksimasikanlah integral diatas dengan menggunakan $h = 0{,}25$ untuk metode simpson bersusun

3. Aproksimasikanlah integral diatas dengan menggunakan $h = 0{,}25$ untuk metode midpoint bersusun