PENGERTIAN DAN OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

Fungsi Kompleks
(Bab I. Bilangan Kompleks)

Dra. Retno Marsitin, M.Pd.

Pengertian Bilangan Kompleks

BAB 1

1. Bilangan Kompleks z yaitu: semua besaran yang dapat ditulis dalam bentuk $x + iy$ dari bilangan real x dan y dengan $i = \sqrt{-1}$ atau ditulis sebagai pasangan berurutan $z = (x, y)$
2. Bentuk bilangan kompleks: $z = x + iy$ dengan:
   - **x disebut bilangan real** dari z ditulis **Re(z)**
   - **y disebut bagian imajiner** dari z ditulis **Im(z)**

sehingga: $x = Re(z)\ dan\ \ y = Im(z) \longrightarrow Re(z) dan\ Im(z) adalah\ bilangan\ real$

Lanjutan Pengertian Bilangan Kompleks

BAB 1

Apabila dari bilangan kompleks $z = x + iy$, dengan:

a. Bagian real $Re(z) \neq 0$ dan bagian imajiner $Im(z) = 0$ maka $z = x$ adalah ***bilangan real***. Dengan demikian semua bilangan real x dapat dipandang sebagai bilangan kompleks dengan bentuk $z = x + 0i$

b. Bagian real $Re(z) = 0$ dan bagian imajiner $Im(z) \neq 0$ maka $z = iy$ adalah **bilangan khayal (imajiner)**.

c. Bagian real $Re(z) = 0\ dan\ Im(z) = 1$ maka $z = i$ disebut **satuan imajiner**.

d. Bagian real nol dan bagian imajiner nol maka dikatakan **bilangan kompleks nol** atau $z = 0$ sehingga $z = 0 = 0 + 0i$

Lanjutan Pengertian Bilangan Kompleks

BAB 1

- Bilangan kompleks dapat ditulis sebagai pasangan berurutan $z = (x, y)$ maka pada umumnya $(x, y) \neq (y, x)$
- Dua bilangan kompleks sama bila dan hanya bila bagian real sama dan bagian imajiner sama, sehingga:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \; bhb \; x_1 = x_2 \;\; dan \;\; y_1 = y_2$$

- Oleh karena itu $z_n = (x_n, y_n)$, n = 1,2,3 misalnya dipandang sebagai bilangan kompleks yang berlainan. Namun demikian ***dua bilangan kompleks tidak dapat dibandingkan***, satu lebih besar dari yang lain seperti $z_1 > z_2$ atau sebaliknya

Operasi Aljabar Bilangan Kompleks

BAB 1

Operasi Uner (unary operation)

a. Negatif (***lawan penjumlahan***) dari bilangan kompleks $z = x + iy$

Didefinisikan: $-z = -(x + iy) = -x - iy$

b. Kawan (***conjugate***) dari bilangan kompleks $z = x + iy$

Didefinisikan: $\bar{z} = x - iy$, sehingga $z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$

c. Kebalikan (***lawan perkalian***) dari bilangan kompleks$z = x + iy$

Didefinisikan: $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

Lanjutan Operasi Aljabar Bilangan Kompleks

BAB 1

Operasi Biner

- *Bila* $z_1 = x_1 + iy_1$ *dan* $z_2 = x_2 + iy_2$ *maka:*

  a. $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

  b. $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

  c. $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

  d. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ asal $z_2 \neq 0$

Lanjutan Operasi Aljabar Bilangan Kompleks

BAB 1

Sifat-sifat operasi

a. Komutatif: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \ dan \ z_1 z_2 = z_2 z_1$

b. Assosiatif: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \ dan \ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

c. Distributif: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_2$

d. Sekawan:

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ dan $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$ dan $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

(3) $\bar{\bar{z}} = z$

(4) $z\bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

(5) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{z_2 \bar{z_2}}$ dan $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}$

(6) $z + \bar{z} = 2Re(z)$ dan $z - \bar{z} = 2i\, Im(z)$

(7) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ dan $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Lanjutan Operasi Aljabar Bilangan Kompleks

BAB 1

Elemen Netral (elemen identitas)

(1) Bilangan kompleks $0 = 0 + i0$ disebut elemen netral pertambahan (identitas tambahan)

(2) Bilangan kompleks $1 = 1 + i0$ disebut elemen netral perkalian (identitas kali)

Sifat-sifat:

- $z + 0 = 0 + z = z \;\; dan \;\; z.1 = 1.z = z$
- $z + (-z) = 0 \;\; dan \;\; z.\frac{1}{z} = z.z^{-1} = 1$

Contoh

(1) Hitunglah:

a. $(4+2i)+(-7-i)$

b. $(5+3i)+\{((-1+2i)+(7-5i)\}$

c. $\{(5+3i)+(-1+2i)+(7-5i)\}$

(2) Apabila $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$ maka hitunglah:

a. $\{(5+3i)+(-1+2i)+(7-5i)\}$

b. $\overline{z_2} - 2\overline{z_1} + 5$

(3) Tunjukkan bahwa $z.\overline{z_1} = \left[Re_{(z)}\right]^2 + \left[Im_{(z)}\right]^2$

Penyelesaian Contoh

Penyelesaian

(1) a. $(4+2i)+(-7-i)=4+2i-7+i=-3+3i$

b. $(5+3i)+\{((-1+2i)+(7-5i)\}=(5+3i)+(-1+2i+7-5i)=(5+3i)+(6-3i)=11$

c. $\{(5+3i)+(-1+2i)+(7-5i)\}=\{5+3i-1+2i\}+(7-5i)=(4+5i)+(7-5i)=11$

(2) Apabila $z_1=2+i, z_2=3-2i$ maka:

a. ${z_1}^3-3{z_1}^2+4z_1-8=(2+i)^3-3(2+i)^2+4(2+i)-8=\{2^3+3(2)^2(i)+3(2)i^2\}-3(4+4i+i^2)+8+4i-8=-7+3i$

b. $\overline{z_2}-2\overline{z_1}+5=\overline{(3-2i)}-2\overline{(2+i)}+5=3+2i-2(2-i)+5=3+2i-4+2i+5=4+4i$

(2) Misalkan: $z=x+iy\ maka\ \bar{z}=x-iy$ sehingga: $z\bar{z}=(x+iy)(-iy)=x^2+y^2=\left[Re_{(z)}\right]^2+\left[Im_{(z)}\right]^2$

Jadi terbukti bahwa: $z.\overline{z_1}=\left[Re_{(z)}\right]^2+\left[Im_{(z)}\right]^2$

Soal-Soal Latihan

1. Tunjukkan bahwa:

   a. Jika $z = -1$ maka $z^2 + 2z + 2 = 0$ b. $(1+z)^2 = 1 + 2z + z^2$

2. Diberikan $z = 2 + 3i$, $u = 5 - 3i$ dan $v = 1 - i$ maka tentukan:

   a. $z + u$ b. $u - v$ c. vz d. $z\bar{u}$ e. $\frac{u}{\bar{v}}$

3. Tunjukkan bahwa $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ dan $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

4. Tunjukkan bahwa:

   a. $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$ b. $(2,-3)(-2,1) = (-1,8)$ c. $(1-i)^4 = -4$