FUNGSI HIPERBOLIK, FUNGSI LOGARITMA & INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI DAN HIPERBOLIK

FUNGSI KOMPLEKS

(BAB III. FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER)

DRA. RETNO MARSITIN, M.PD

FUNGSI HIPERBOLIK

- Fungsi hiperbolik pada analisis kompleks didefinisikan :

➢ $\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

➢ $\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

➢ $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$

- e^{z} *dan* e^{-z} merupakan fungsi menyeluruh maka demikian juga $\sinh z$ *dan* $\cosh z$, sedangkan $\tanh z$ merupakan fungsi analitik di setiap domain asalkan $\cosh z \neq 0$.

LANJUTAN FUNGSI HIPERBOLIK

- Fungsi hiperbolik kompleks bentuknya mirip dengan fungsi hiperbolik variabel real, sebagai berikut:

- $\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$ $\quad$ $\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$ $\quad$ $\frac{d}{dz}\tanh z = sech^2 z$
- $\frac{d}{dz}\coth z = -cosech^2 z$ $\quad$ $\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$ $\quad$ $\frac{d}{dz} cosech\ z = -cosech\ z \coth z$
- $sinh^2\ z + cosh^2\ z = 1$ $\quad$ $\sinh(-z) = -\sinh z$
- $\cosh(-z) = \cosh z$ $\quad$ $\tanh(-z) = -\tanh z$
- $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sin z_2$

LANJUTAN FUNGSI HIPERBOLIK

- $\cos h(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_1 \sin z_2$

  $\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$
- $\sinh(iz) = i \sin z$

  $\sin(iz) = i \sinh z$
- $\cosh(iz) = \cos z$

  $\cos(iz) = \cosh z$
- $\sinh(z) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

  $\cosh(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
- $|sinh|^2 z = sinh^2 x + sin^2 y$

  $|cosh|^2 z = sinh^2 x + cos^2 y$

LANJUTAN FUNGSI HIPERBOLIK

- $e^z \ dan \ e^{-z}$ periodik dengan periode $2\pi i$
- $\cosh z \ \ dan \ \sinh z$ merupakan fungsi periodik dengan periode $2\pi i$ $\longrightarrow$ $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$, $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$

- Apabila dari sifat dari:

➢ $\sinh z = -\sin iz$ $\longrightarrow$ $\sinh z = 0$ bila dan hanya bila $z = k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

➢ $\cosh z = \cos iz$ $\longrightarrow$ $\cos z = 0$ bila dan hanya bila $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

CONTOH

(1) Tunjukkan bahwa $\sin z = \sin x \; cosh \; y + i \cos x \; sinh \; y$

(2) Tunjukkan bahwa $\sinh(iz) = i \sin z$

Peyelesaian:

(1) Pembuktian $\sin z = \sin x \; cosh \; y + i \cos x \; sinh \; y$, yaitu dengan menguraikan $\cos z \; dalam \; bentuk \; u + iv$ dan misal $z = x + iy$, diperoleh:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}) = \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i \sin x) + (e^{y}(\cos x - i \sin x)] = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \cos x - \frac{i}{2}(e^{y} - e^{-y}) \sin x$$

$\cos z = cos \; x \cosh y - i \sin x \sinh y$ (terbukti)

(2) Pembuktian bahwa $\sinh(iz) = i \sin z$, yaitu:

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) = -i \sinh z \quad \text{(terbukti)}$$

FUNGSI LOGARITMA

- Logaritma naturalis dari bilangan nyata positip x dapatditulis $\ln x$. Untuk selanjutnya fungsi logaritma dari peubah kompleks z dimana $z = re^{i\theta}$ dengan ***r* modulus dari *z* dan $\boldsymbol{\theta}$ argumen *z* yang berharga banyak** yaitu $(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, didefinisikan:

$$\ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + i\theta$$

- Apabila φ harga utama dari θ yaitu $-\pi < \varphi \leq \pi$ atau ditulis $= (\varphi + 2k\pi), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, maka fungsi tersebut dapat ditulis:

$$\ln z = \ln r + i\,(\varphi + 2k\pi), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

- Selanjutnya harga utama dari $\ln z$ adalah apabila $\boldsymbol{k = 0}$ sehingga formulanya menjadi:

$$\mathrm{Ln}\, z = Ln\, r + i\varphi\,, r > 0\,, -\pi < \varphi \leq \pi$$

- Dengan demikian harga $w = Ln\ z$ adalah fungsi berharga satu dengan domain definisinya seluruh bidang z kecuali nol, sedangkan daerah hasilnya pita $-\pi < Im(w) \leq \pi$

LANJUTAN FUNGSI LOGARITMA

- Apabila dikaitkan dengan fungsi eksponensial $w = e^z$ dan dipertukarkan z dengan w yaitu $z = e^w$ maka didapat korespondensi satu-satu antara non zero titik-titik dibidang kompleks z dengan titik-titik dalam pita $-\pi < Im(w) \leq \pi$ di bidang w.
- Titik $z = r\exp(i\varphi)$ di bidang kompleks z berkorespondensi dengan titik $w = Ln\, r + i\varphi$ di bidang w, sehingga bila domain definisi dari fungsi e^w terbatas sepanjang pita $-\pi < Im(w) \leq \pi$ maka merupakan fungsi invers dari fungsi logaritma utama$Ln\ z$ dan dapat dikatakan:

$$w = Ln\ z\ \ bila\ dan\ hanya\ bila\ \ z = e^w$$

- Fungsi $\mathrm{Ln}\, z = Ln\, r + i\varphi\ , r > 0\ , -\pi < \varphi \leq \pi$ adalah kontinu dalam domain $r > 0\ , -\pi < \varphi \leq \pi$ karena komponen-komponennya $u(r, \varphi)\ \ dan\ \ v(r, \varphi)$ adalah kontinu di setiap titik pada domain.
- Derivative parsial tingkat satu dari u dan v adalah kontinu dan memenuhi PCR sehingga $Ln\ z$ adalah analitik.

LANJUTAN FUNGSI LOGARITMA

- Apabila $z = re^{i\theta}$ maka $\frac{d}{dz} Ln\, z = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{re^{i\theta}}$ sehingga bisa ditulis dengan sifat-sifat sebagi berikut:

- $\frac{d}{dz} Ln\, z = \frac{1}{z}$
- $e^{\ln z} = z$
- $\ln e^{z} = Ln\, |e^{z}| + i \arg e^{z} = x + i\,(y + 2k\pi) = z + 2k\pi\,,\;\; k = 0,\; \pm 1, \pm 2, \dots$
- $\ln(z_1 + z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
- $\ln\left[\frac{z_1}{z_2}\right] = \ln z_1 - \ln z_2$
- $\ln\left(z^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln z$
- $z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln z\right)$

LANJUTAN FUNGSI LOGARITMA

- Pada umumnya $\ln(z^n) \neq n \ln z$, dapat ditunjukkan dengan memisalkan $z = i \;\; dan \;\; n = 2$, maka:

$$\ln(z^n) = \ln(i^2) = \ln(-1) = (\pi + 2k\pi)i = (1 + 2k)\pi i \, , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- sedangkan $\quad n \ln z = 2 \ln i = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = (1 + 4k)\pi i \, , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Dari uraian diatas diperoleh hasil yang berbeda dan dapat dikatakan bahwa $\ln(i^2) \neq 2 \ln i$
- Harga $\ln(z^n) = n \ln z$ hanya apabila keduanya bernila tunggal.
- Misalnya: $\quad \ln[(1 + i)^2] = 2 \quad \boldsymbol{tetapi} \quad \ln[(-1 + i)^2] \neq 2 \ln(-1 + i)$

CONTOH

- Contoh:

(1) Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$

(2) Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz} ln\, f(z) = \frac{f\prime(z)}{f(z)}$

- Penyelesaian:

(1) Pembuktian bahwa $\frac{d}{dz} ln\, z = \frac{1}{z}$, yaitu:

Misal: $w = \ln z$, maka: $z = e^w$ dan $\frac{dz}{dw} = e^w = z$ sehingga: $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{z}$ (terbukti)

Catatan: turunan tersebut tidak ada di titik cabang $z = 0$

(2) Pembuktian bahwa $\frac{d}{dz} ln\, f(z) = \frac{f\prime(z)}{f(z)}$

Misal: $w = \ln \zeta$ dengan $\zeta = f(z)$, maka: $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{f\prime(z)}{f(z)}$ (terbukti)

SOAL LATIHAN

- ***Soal-soal:***

1. Tunjukkan bahwa :

a. $Ln\,(1 - ei) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right) i$

b. $Ln\,(1 - i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{\pi}{4}\right) i$

1. Tunjukkan bahwa:

a. $\ln 1 = 2k\pi i$

b. $\ln(-1) = (2k + 1)\pi i$

c. $\ln(i) = (2k + \frac{1}{2})\pi i$

INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI DAN HIPERBOLIK

- Invers fungsi trigonometri dan hiperbolik dapat dinyatakan dalam logaritma dan invers fungsi sinus yaitu $sin^{-1}z$ misalnya, kita tulis: $w = sin^{-1}z$ hanya apabila $z = \sin w$ sehingga:

$$z = \sin w \qquad\qquad z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

- diperoleh:

$$sin^{-1}z = -i \ln\left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

- Invers dari cosines dan cotangens dapat diperoleh dengan jalan yang sama yaitu:

1. $cos^{-1}z = -i \ln\left[z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$
2. $tan^{-1}z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

LANJUTAN INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI DAN HIPERBOLIK

- Derivative dapat diturunkan langsung dari definisi:

1. $\frac{d}{dz} sin^{-1}z = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$
2. $\frac{d}{dz} tan^{-1}z = \frac{1}{1-z^2}$
3. $\frac{d}{dz} cos^{-1}z = \frac{-1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$

- Untuk fungsi hiperbolik, inversnya dapat diperoleh:

1. $sinh^{-1}z = \ln\left[z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]$
2. $cosh^{-1}z = \ln\left[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$
3. $tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

CONTOH

- Contoh: 1. Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz} sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$

  2. Tentukan turunan dari $z\, tanh^{-1}(\ln z)$

- Penyelesaian:

1. Pembuktian bahwa $\frac{d}{dz} sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$, yaitu apabila memandang cabang utama dari $sin^{-1} z$, sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dz} sin^{-1} z = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right\}\right. = \frac{\frac{1}{i}\frac{d}{z}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)}{iz+\sqrt{1-z^2}} = \frac{\frac{1}{i}\left\{i+\frac{1}{2}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}(-2z)\right\}}{iz+\sqrt{1-z^2}} = \frac{1+\frac{iz}{\sqrt{1-z^2}}}{iz+\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(terbukti)

- Catatan: turunan tersebut tidak ada di titik cabang $z = \pm 1$

LAJUTAN CONTOH

2. Menentukan turunan dari $z\ tanh^{-1}(\ln z)$, yaitu:

- $\frac{d}{dz}\{(z)[tanh^{-1}(\ln z)]\} = z\frac{d}{dz}\ [tanh^{-1}(\ln z)] + [tanh^{-1}(\ln z)]\frac{d}{dz}(z)$

  - $= \left\{\frac{1}{1+(\ln z)^2}\right\}\frac{d}{dz}(\ln z) + [tanh^{-1}(\ln z)] = \frac{1}{1+(\ln z)^2} + tanh^{-1}(\ln z)$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan turunan dari: a. $(tanh^{-1}(iz+2))^2$ b. $cos^2(2z+3i)$

2. Apabila $w = sin^{-1}(t-3)$ dan $z = \cos(\ln t)$, tentukan $\frac{dw}{dz}$

3. Tunjukkan bahwa: a. $\frac{d}{dz}(sec^{-1}z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$ b. $\frac{d}{dz}(cosech^{-1}z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2+1}}$

4. Tentukan turunan setiap fungsi berikut:

a. $\{sin^{-1}(2z-1)\}^2$

b. $\ln(cot^{-1}z^2)$

c. $sin^{-1}(\sin z - \cos z)$

d. $tan^{-1}(z+3i)^{-\frac{1}{2}}$

5. Apabila $w = cos^{-1}(z-1),\ z = \sinh\,(3\zeta + 2i)\ dan\ \zeta = \sqrt{t}$, tentukan $\frac{dw}{dt}$