



Telkom
University

Variabel Kompleks (VARKOM)

**Pertemuan 10 : Fungsi Entire, Fungsi
Analitik, Fungsi Differentiable,
pengantar Integral**

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : September 2018

Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari Kuliah kali ini adalah

- Menjelaskan fungsi entire, fungsi analitik, dan fungsi differentiable
- Menjelaskan macam-macam titik singular
- Menjelaskan lintasan bebas dan lintasan yang mengelilingi titik singular
- Pengantar Integral

Materi ini adalah pengantar ke integral kompleks

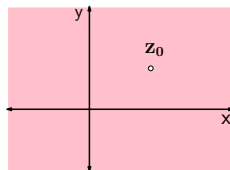
Daftar Isi

1 Differentiable, Analitik, dan Entire

2 Integrasi Kompleks

Sifat *differentiable*

- 1 Tinjau suatu fungsi terurai : $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$
- 2 Tinjau pula bidang-z: $|z| < \infty$
- 3 Tinjau suatu titik z_0 pada bidang-z tersebut.



- 4 Fungsi $f(x+iy)$ disebut *differentiable* di $z_0 = x_0 + iy_0$, jika PCR terpenuhi di titik tersebut.

Sifat *differentiable*

Contoh 1:

Tentukan apakah $f(x + iy) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$ *differentiable* di $z = 1 + i$.

Jawab:

- 1 Periksa PCR:
 $U_x = 2x + 1$; $U_y = -2y$; $V_x = 2y$; $V_y = 2x + 1$
- 2 $U_x = V_y$ dan $U_y = -V_x$ dengan demikian syarat PCR terpenuhi.
- 3 PCR terpenuhi untuk setiap (x,y) pada bidang- z dengan demikian $f(x+iy)$ *differentiable* di setiap titik pada bidang- z termasuk di $z=1+i$.

Sifat *differentiable*

Contoh 2:

Tentukan apakah $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i(xy)$ *differentiable* di $z = 1 + i$.

Jawab:

- 1 Periksa PCR:
 $U_x = 2x$; $U_y = -2y$; $V_x = y$; $V_y = x$
- 2 Syarat $U_x = V_y$ memberikan $2x=x$ dan $U_y = -V_x$ memberikan $-2y = y$
- 3 PCR hanya terpenuhi untuk $x=0$ dan $y=0$, jadi $f(x+iy)$ hanya *differentiable* di $z = 0 + i0$ dan tidak di titik lain termasuk di $z = 1 + i$

Sifat *differentiable*

Contoh 3:

Tentukan apakah $f(x + iy) = 2x^2 + i(5y)$ *differentiable* di $z = 1 + i$.

Jawab:

① Periksa PCR:

$$U_x = \dots\dots\dots U_y = \dots\dots\dots V_x = \dots\dots\dots V_y = \dots\dots\dots$$

②

③

Sifat *differentiable*

Contoh 4:

Tentukan apakah $f(x + iy) = 2e^x \cos y + 5 - i 2e^x \sin y$
differentiable di $z = 1 + i$.

Jawab:

1 Periksa PCR: $U_x = \dots\dots\dots$ $U_y = \dots\dots\dots$ $V_x =$
 $\dots\dots\dots$ $V_y = \dots\dots\dots$

2

3

Sifat *differentiable*

Contoh 4:

Tentukan apakah $f(x + iy) = 2e^x \cos y + 5 - i 2e^x \sin y$
differentiable di $z = 1 + i$.

Jawab:

1 Periksa PCR: $U_x = \dots\dots\dots U_y = \dots\dots\dots V_x =$
 $\dots\dots\dots V_y = \dots\dots\dots$

2

3

Sifat *differentiable*

Contoh 5:

Tentukan apakah $f(z) = \bar{z}$ *differentiable* di $z = 1 + i$.

Jawab:

$$f(z) = \bar{z} \rightarrow f(x + iy) = x - iy$$

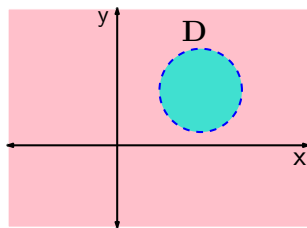
① Periksa PCR: $U_x = \dots\dots\dots U_y = \dots\dots\dots V_x =$
 $\dots\dots\dots V_y = \dots\dots\dots$

②

③

Fungsi *analitik*

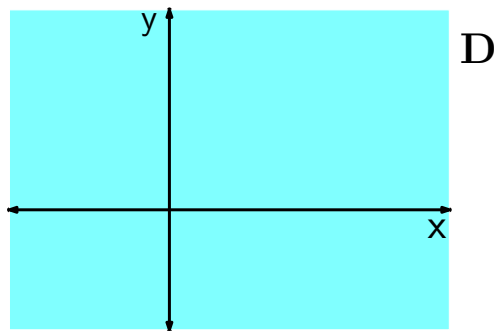
- 1 Tinjau suatu fungsi terurai : $f(z)$ atau $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$
- 2 Tinjau bidang-z: $|z| < \infty$
- 3 Tinjau suatu daerah D pada bidang-z tersebut.



- 4 Fungsi $f(x+iy)$ disebut *analitik* di D , jika $f(x+iy)$ differentiable pada setiap titik di D .

Fungsi *entire*

- 1 Suatu fungsi $f(z)$ atau $f(x + iy)$ disebut **entire** jika $f(z)$ atau $f(x+iy)$ tersebut **differentiable** pada semua titik pada bidang z .
- 2 Dengan kata lain, **fungsi entire** adalah **fungsi analitik** pada semua D : $|z| < \infty$



Fungsi *entire*

- 1 Pada umumnya fungsi elementer $f(z)$ adalah entire.

Contoh: $f(z) = 2z$; $f(z) = 2z^2 + 5$; $f(z) = \sin(z)$
 $f(z) = e^z$

- 2 Pada umumnya fungsi elementer yang melibatkan sekawan kompleks \bar{z} tidak analitik karena itu tidak entire.

Contoh: $f(z) = 2\bar{z}$; $f(z) = z + \bar{z}$; $f(z) = \sin(\bar{z})$
 $f(z) = e^{\bar{z}}$

- 3 fungsi pecahan/rasional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ pada umumnya **analitik** pada setiap daerah kecuali pada $Q(z) = 0$.
- 4 z yang menyebabkan $Q(z) = 0$ disebut titik singular.

Titik Singular

Contoh: Tentukan titik singular dari: $f(z) = \frac{5z}{(z+1)(z+2)^2}$

Jawab:

- 1 $Q(z) = (z + 1)(z + 2)^2$
- 2 Nilai z yang menyebabkan $Q(z) = 0$ adalah : $z = -1$ dan $z = -2$
- 3 Titik singular di $z = -1$ disebut titik singular **orde 1**.
- 4 Titik singular di $z = -2$ disebut titik singular **orde 2**.

Titik Singular

Contoh lain: Tentukan titik singular dari:

$$f(z) = \frac{5(z+7)}{z^3(z+2z+1)(z-5)}$$

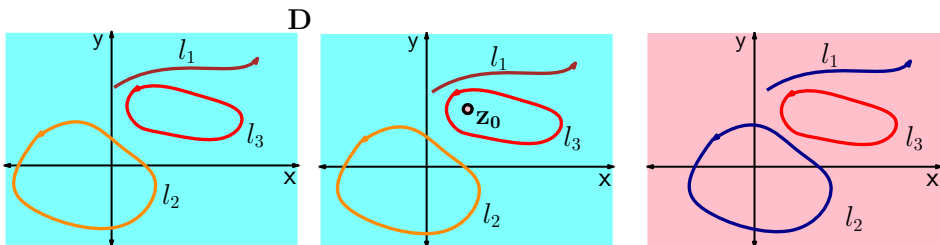
Jawab:

- 1 $Q(z) = \dots$
- 2 Nilai z yang menyebabkan $Q(z) = 0$ adalah : $z = \dots$ dan $z = \dots$ dan $z = \dots$
- 3 Titik singular di $z = \dots$ disebut titik singular orde
- 4 Titik singular di $z = \dots$ disebut titik singular orde
- 5 Titik singular di $z = \dots$ disebut titik singular orde

Pengantar Integral: Lintasan pada berbagai fungsi

Tinjau **tiga fungsi**: Fungsi entire (misal $f_1(z) = 2z + 5$), fungsi analitik dengan titik singular (Misal $f_2(z) = \frac{1}{z-z_0}$), dan Fungsi tidak analitik (Misal $f_3(x + iy) = 2x + i5y$).

Fungsi entire Fungsi analitik dengan singular Fungsi tidak analitik



Lintasan l_1 , l_2 dan l_3 seperti gambar. Akan dilihat bahwa Integrasi $(\int) f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ pada pada masing-masing lintasan memiliki karakteristik berbeda.

Integrasi Kompleks

Integrasi kompleks $f(z)$ pada lintasan I :

$$\int_I f(z) dz$$

menyatakan penjumlahan

$$f(z_1)\Delta z_1 + f(z_2)\Delta z_2 + \cdots + f(z_N)\Delta z_N$$

Dengan Δz_i sangat kecil (N sangat besar)

z_i titik tengah potongan Δz_i

$f(z_i)$: nilai $f(z)$ di z_i titik tengah potongan Δz_i



Integrasi Kompleks

Teknik menghitung integrasi:

$$\int_I f(z) dz$$

- ① Tulis persamaan lintasan I dalam parameter t :

$$z = r(t) + i s(t)$$

- ② Turunkan z terhadap t : $\frac{dz}{dt} = r'(t) + i s'(t)$

- ③ Atau $dz = r'(t) dt + i s'(t) dt$

- ④ substitusi $z = r(t) + i s(t)$ pada $f(z)$.

⑤

$$\int_I f(z) dz = \int_{t_A}^{t_B} f(r(t) + i s(t)) (r'(t) dt + i s'(t) dt)$$

- ⑥ Pisahkan integrasi menjadi bagian riil dan imajiner dan selesaikan seperti integrasi biasa.

Integrasi Kompleks

Contoh : hitung

$$\int_I (2z + 5) dz$$

dengan lintasan garis lurus dari $(0, 0)$ ke $(4, 2)$. **Jawab:**

- 1 Tulis persamaan lintasan I dalam parameter t : $z = 2t + it$;
 $0 \leq t \leq 2$
- 2 Turunkan z terhadap t : $\frac{dz}{dt} = 2 + i$
- 3 Atau $dz = 2 dt + i dt$
- 4 $\int_I (2z + 5) dz =$
 $\int_0^2 (2(2t - it) + 5)(2dt + idt) = \int_0^2 (4t + 5 - i2t)(2dt + idt)$
- 5 Pisahkan kedua integral ini menjadi bagian riil dan imajiner:
 $\int_I (2z + 5) dz = \int_0^2 [2(4t + 5) + 2t] dt + i \int_0^2 (4t + 5 - 4t) dt =$
 $\int_0^2 [10t + 10] dt + i \int_0^2 5 dt = \dots$

Integrasi Kompleks

Contoh : hitung

$$\int_I (2z + 5) dz$$

dengan lintasan garis lurus dari $(0, 0)$ ke $(4, 0)$, dilanjutkan dari $(4, 0)$ ke $(4, 2)$. **Jawab:**

- 1 Tulis persamaan lintasan I dalam parameter t , terdapat dua potongan lintasan: $z = \dots\dots\dots$; $0 \leq t \leq 4$ dan $z = \dots\dots\dots + i \dots\dots\dots$; $4 \leq t \leq 6$
- 2
- 3
- 4

Integrasi Kompleks

Pertanyaan: apakah

$$\int_{l_1} (2z + 5) dz$$

dengan lintasan l_1 garis lurus dari $(0, 0)$ ke $(4, 0)$, dilanjutkan dari $(4, 0)$ ke $(4, 2)$.

sama hasilnya dengan:

$$\int_{l_2} (2z + 5) dz$$

dengan lintasan l_2 garis lurus dari $(0, 0)$ ke $(4, 2)$?

Latihan

- 1 Apakah $f(x+iy)$ berikut entire?
 - 1 $f(x + iy) = x^2 - y^2 + x + 2 + i(2xy + y)$
 - 2 $f(x + iy) = 2xy + i(x^2 - y^2)$
 - 3 $f(x + iy) = x + y + i(xy)$
- 2 Apakah $f(z)$ berikut entire?
 - 1 $f(z) = z\bar{z}$
 - 2 $f(z) = z^2 + 2z$
 - 3 $f(z) = ze^z$
 - 4 $f(z) = \tan z$
 - 5 $f(z) = \frac{z}{z+2}$
- 3 Hitung integral

$$\int_I z dz$$

dengan

- 1 lintasan / garis lurus dari $(0, 0)$ ke $(2, 4)$
- 2 lintasan / lintasan $z = t^2 + t, 0 \leq t \leq 2$