MATERI V

PERSAMAAN KUADRAT

I. Kemampuan akhir yang direncanakan:
Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah berkaitan dengan persamaan kuadrat

II. Indikator:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan arti bentuk umum persamaan kuadrat
2. Mahasiswa mampu menentukan akar-akar persamaan kuadrat
3. Mahasiswa mampu menentukan jenis-jenis akar persamaan kuadrat
4. Mahasiswa mampu menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat

Persamaan kuadrat merupakan persamaan matematika yang memuat variabel dengan pangkat tertinggi dua**.** Persamaan kuadrat juga sering disebut sebagai persamaan parabola.

Bentuk umum dari persamaan kuadrat :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

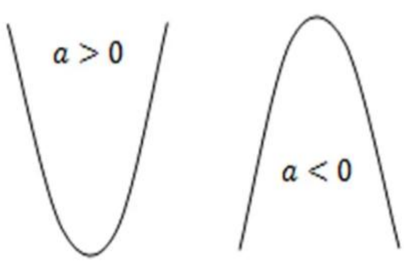
Keterangan:

x : variabel

a, b : koefisien

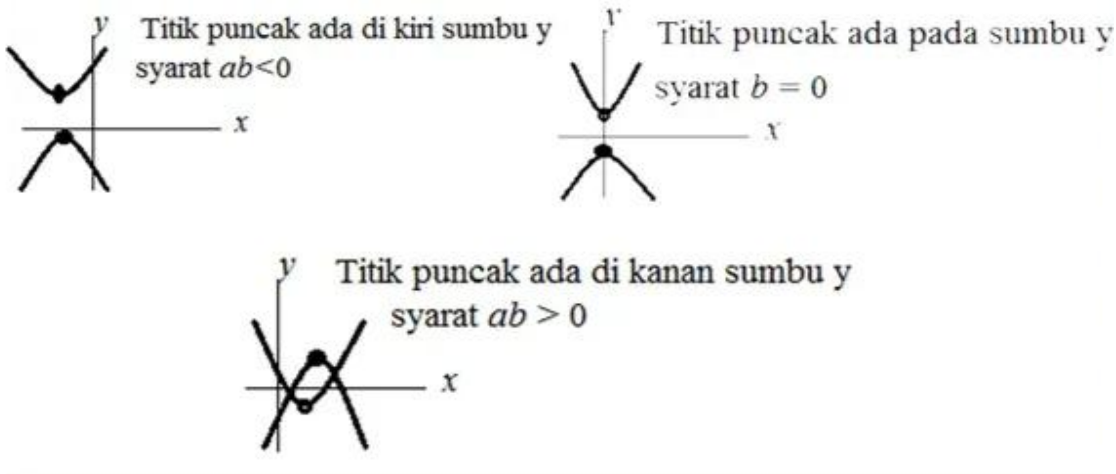
c : konstanta

Pada persamaan kudrat umum nilai a, b, dan c sangat mempengaruhi pola parabolik yang dihasilkan. Nilai a menentukan cekung atau cembungnya kurva parabola. Jika nilai dari $a>0$**,** maka parabola akan **terbuka ke atas (cekung)**. Sebaliknya, jika $a < 0$, maka parabola akan **terbuka ke bawah (cembung)**.



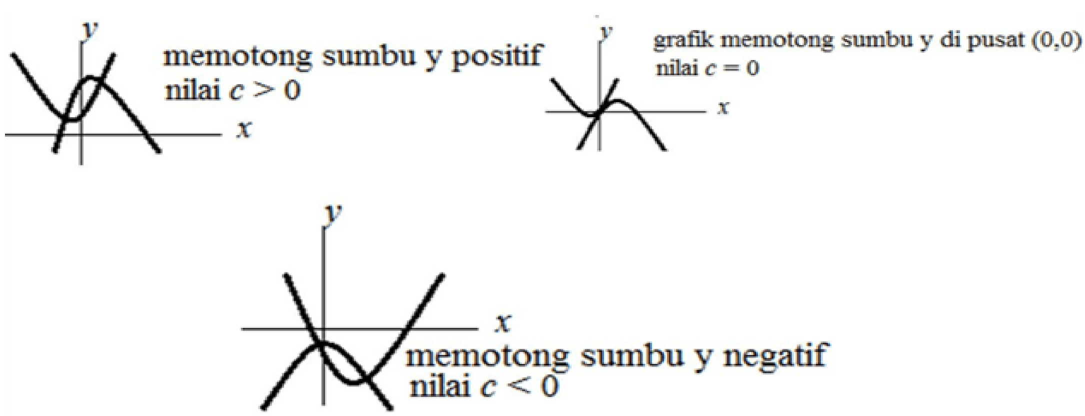
Gambar 1. Pola Parabolik (Cekung atau Cembung) yang Dihasilkan Karena Perubahan nilai *a*

Nilai *b* pada persamaan kuadrat menentukan **posisi puncak parabola**. Dengan kata lain, nilai *b* menentukan nilai sumbu simetri kurva yang senilai dengan $x = \frac{b}{2a}$.



Gambar 2. Pola Parabolik yang Dihasilkan Karena Perubahan nilai *b* dan ab

Nilai konstanta *c* pada grafik persamaan menentukan **titik potong fungsi parabola dengan sumbu y**. Berikut grafik parabolik dengan perubahan nilai konstanta **c**.



Gambar 3. Pola Parabolik yang Dihasilkan Karena Perubahan nilai *c*

A. Akar-akar Persamaan Kuadrat (PK)

Penyelesaian dari persamaan kuadrat disebut sebagai akar-akar persamaan kuadrat.

Macam-macam Akar Persamaan Kuadrat

Macam akar persamaan kuadrat dapat diketahui dengan mudah menggunakan rumus umum D = b^2 – 4ac dari persamaan umum kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$.

.

Berikut macam-macam akar persamaan kuadrat.

1. Akar Real (D > 0)

Jika nilai D > 0 dari suatu persamaan kuadrat, maka akar-akar persamaan kuadrat bernilai real namun memiliki akar-akar yang berlainan. Dengan kata lain x_1 tidak sama dengan x_2.

Contoh persamaan akar real (D > 0)

Tentukan jenis akar persamaan dari persamaan $x^2 + 4x + 2 = 0$.

Penyelesaian:

a = 1; b = 4; dan c = 2

$D = b^2 – 4ac$

$D = 4^2 – 4(1)(2)$

D = 16 – 8

D = 8

Jadi karena nilai D > 0, maka jenis akar persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 2 = 0$ adalah akar real.

2. Akar real sama, $x_1 = x_2$ (D = 0)

Merupakan jenis akar persamaan kuadrat yang menghasilkan akar-akar bernilai sama ($x_1 = x_2$).

Contoh akar real (D=0)

Tentukan nilai akar-akar persamaan $2x^2 + 4x + 2 = 0$.

Penyelesaian:

a = 2; b = 4; c = 2

$D = b^2 – 4ac$

$D = 4^2 – 4(2)(2)$

D = 16 – 16

D = 0

Jadi karena nilai D = 0, maka terbukti akar real dan kembar.

3. Akar Imajiner / Tidak Real (D < 0)

Jika nilai $D < 0$, maka akar dari persamaan kuadrat akan berbentuk imajiner/ tidak real.

Contoh akar imajiner ($D < 0$)

Tentukan jenis akar dari persamaan $x^2 + 2x + 4 = 0$.

Penyelesaian:

$a = 1$; $b = 2$; $c = 4$

$D = b^2 – 4ac$

$D = 2^2 – 4(1)(4)$

$D = 4 – 16$

$D = -12$

Jadi karena nilai $D < 0$, maka akar persamaanya merupakan akar tidak real atau imajiner.

B. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Untuk mencari penyelesaian persamaan kuadrat, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, diantaranya yaitu faktorisasi, kuadrat sempurna, dan menggunakan rumus ABC.

Berikut penjelasan mengenai beberapa metode untuk mencari penyelesaian persamaan kuadrat.

1. Faktorisasi

Faktorisasi/pemfaktoran adalah suatu metode dalam menentukan akar-akar dengan mencari nilai yang jika dikalikan maka akan menghasilkan nilai lain.

Terdapat tiga bentuk persamaan kuadrat (PK) dengan faktorisasi akar-akar yang berbeda, yaitu:

No	Bentuk persamaan	Faktorisasi Akar-akar
1	$\mathbf{x^2 + 2xy + y^2 = 0}$	$\mathbf{(x + y)^2 = 0}$
2	$\mathbf{x^2 – 2xy + y^2 = 0}$	$\mathbf{(x – y)^2 = 0}$
3	$\mathbf{x^2 – y^2 = 0}$	$\mathbf{(x + y)(x – y) = 0}$

Berikut contoh soal mengenai penggunaan metode faktorisasi pada persamaan kuadrat.

Selesaikan persamaan kuadrat $5x^2 + 13x + 6 = 0$ menggunakan metode faktorisasi.

Penyelesaian:

$5x^2 + 13x = 6 = 0$

$5x^2 + 10x + 3x + 6 = 0$

$5x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$

$(5x + 3)(x + 2) = 0$

$5x = -3$ atau $x = -2$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = -\frac{3}{5}$ atau $x = -2$

2. Kuadrat Sempurna

Bentuk kuadrat sempurna merupakan bentuk persamaan kuadrat yang menghasilkan bilangan rasional.

Hasil dari persamaan kuadrat sempurna umumnya menggunakan rumus sebagai berikut:

$(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$

Penyelesaian umum dari persamaan kuadarat sempurna ialah sebagai berikut:

$(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$

dengan pemisalan $(x+p)^2 = q$, maka:

$(x+p)^2 = q$

$x+p = \pm q$

$x = -p \pm q$

Berikut contoh soal mengenai penggunaan metode persamaan sempurna.

Selesaikan persamaan $x^2 + 6x + 5 = 0$ menggunakan metode persamaan kuadrat sempurna !

Penyelesaian:

$x^2 + 6x +5 = 0$

$x^2 + 6x = -5$

Langkah selanjutnya yaitu **tambahkan satu angka** di ruas kanan dan kiri hingga dapat membentuk kuadrat sempurna.

$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$

$x^2 + 6x + 9 = 4$

$(x+3)^2 = 4$

$(x+3) = \sqrt{4}$

$x = -3 \pm 2$

Jadi, hasil akhirnya adalah $x = -1$ atau $x = -5$

3. Rumus Kuadrat ABC

Rumus abc merupakan alternatif pilihan ketika persamaan kuadrat sudah tidak bisa diselesaikan dengan metode faktorisasi maupun kuadrat sempurna.

Berikut rumus formula ***abc*** pada persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Gambar 4. Rumus ABC

Berikut contoh penyelesaian soal persamaan kudrat menggunakan formula ***abc***.

Selesaikan persamaan $x^2 + 4x – 12 = 0$ menggunakan metode formula abc!

Penyelesaian:

$x^2 + 4x – 12 = 0$

dengan a=1, b=4, c=-12

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1(-12)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

atau

$$x_2 = \frac{-4 - 8}{2} = -6$$

C. Menyusun Persamaan Kuadrat Baru

Menyusun persamaan kuadrat baru dari akar-akar yang telah diketahui sebelumnya.

Berikut beberapa cara yang dapat digunakan untuk menyusun PK baru.

1. Menyusun persamaan jika telah diketahui akar-akarnya

Jika sebuah persamaan memiliki akar x_1 dan x_2, maka persamaan yang dapat dibentuk dari akar-akar tersebut dinyatakan dalam bentuk

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Contoh:

Tentukan persamaan kuadrat dimana akar-akarnya diantaranya -2 dan 3.

Penyelesaian:

$x_1 = -2$ dan $x_2 = 3$

$(x - (-2))(x - 3) = 0$

$(x + 2)(x - 3)$

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

Jadi, persamaan kuadrat dari akar-akar tersebut adalah $x^2 - x - 6 = 0$

2. Menyusun persamaan kuadrat jika jumlah serta hasil kali akar diketahui

Jika akar-akar persamaan kuadratnya merupakan jumlah dan hasil kali x_1 dan x_2 yang telah diketahui, maka persamaan kuadratnya dapat diubah dalam bentuk sebagai berikut.

$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2) = 0$

Contoh:

Tentukan persamaan kuadrat yang memiliki akar 3 dan $-\frac{1}{2}$!

Penyelesaian:

$x_1 = 3$ dan $x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_1 + x_2 = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$x_1 . x_2 = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

Sehingga, persamaan kuadratnya menjadi :

$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 . x_2) = 0$

$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ (masing-masing ruas dikali 2)

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

Jadi persamaan kuadrat dari akar 3 dan $-\frac{1}{2}$ adalah $2x^2 - 5x - 3 = 0$

.