KEKONGRUENAN

Kartika Sari
Universitas Udayana
Email: sari_wanita@yahoo.co.id

Soal-soal dalam olimpiade matematika merupakan soal-soal yang tidak rutin, karena itu perlu dipelajari strategi *problem solving*. Telah diketahui bahwa ada lebih dari 10 strategi dalam *problem solving* yang salah satunya adalah dengan melihat pola., seperti pada soal berikut yang bisa diselesaikan antara lain dengan melihat pola.

Contoh 1

Tentukan angka satuan dari bilangan 1997^{2013}!

Perhatikan bahwa

$1997^1 = 1997$

$1997^2 = 3988009$

$1997^3 = \ldots 3$

$1997^4 = \ldots 1$

$1997^5 = \ldots 7$

$1997^6 = \ldots 9$

$1997^7 = \ldots 3$

$1997^8 = \ldots 1$

$1997^9 = \ldots 7$

.

.

.

Tampak bahwa 1997^n

- memiliki angka satuan 7, jika $n = 4k + 1$
- memiliki angka satuan 9, jika $n = 4k + 2$
- memiliki angka satuan 3, jika $n = 4k + 3$
- memiliki angka satuan 1, jika $n = 4k$,

dengan k bilangan bulat tak negatif.

Dengan demikian angka satuan dari bilangan 1997^{1991} adalah 3, karena $1991 = 4(497) + 3$

Soal di atas bisa diselesaikan dengan melihat pola. Namun bagaimana apabila dihadapkan pada permasalahan menentukan 2 angka terakhir suatu bentuk pangkat, seperti menentukan dua angka terakhir dari bilangan 3^{2002}? Tentunya akan kesulitan jika diselesaikan dengan melihat pola dan mengingat selain strategi problem solving, hal mendasar lain yang diperlukan dalam menyelesaikan soal-soal Olimpiade Matematika yang tidak rutin itu adalah penguasaan konsep, maka dalam artikel ini akan dibahas mengenai kekongruenan bilangan, yang juga bisa digunakan untuk menyelesaikan soal-soal seperti di atas.

Konsep kekongruenan bilangan dikembangkan berdasarkan konsep bahwa setiap bilangan bulat bulat positif a dapat dinyatakan sebagai $a = km + b$ atau $a - b = km$, dengan b bilangan bulat pada interval $0 \le b \le k$ dan m bilangan bulat positif. (Dalam hal ini, pembaca dianggap sudah memahami sifat-sifat keterbagian bilangan bulat, konsep faktor persekutuan terbesar, relatif prima dan teorema Binomial Newton).

Definisi 1

Misalkan a, b dan m bilangan bulat dengan $m > 0$. Bilangan a disebut kongruen dengan b modulo m apabila $m \mid (a - b)$ atau berlaku $a - b = km$ atau $a = km + b$ (k bilangan bulat) , ditulis $a \equiv b \pmod{m}$

Contoh 2

a. $60 \equiv 15 \pmod{9}$
b. $5 \equiv 27 \pmod{11}$
c. $-5 \equiv 43 \pmod{12}$
d. $-50 \equiv 2 \pmod{13}$

Contoh 3

Jika a bilangan di himpunan $\{3, 10, 17, 24, \ldots\} \cup \{-4, -11, -18, \ldots\}$, maka $a \equiv 3 \pmod{7}$.

Sifat 1

Misalkan a, b, c , d dan m bilangan-bilangan bulat dengan $d > 0$ dan $m > 0$, berlaku:

1. $a \equiv a \pmod{m}$
2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $b \equiv a \pmod{m}$.
3. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$, maka $a \equiv c \pmod{m}$.
4. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $d \mid m$, maka $a \equiv b \pmod{d}$.

Bukti

1. Tentunya $m \mid a - a = 0$.
2. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b = km \Rightarrow b - a = (-k)m \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$.
3. Karena $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b$ dan $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow m \mid b - c$, maka $m \mid (a - b)+(b - c) = a - c$ atau $a \equiv c \pmod{m}$.

4. Karena $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b$ dan $d | m$, maka $d | a - b$ atau $a \equiv b \pmod{d}$ Terbukti.

Sifat 2

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

a. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

b. $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Bukti

a. Karena $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b$ dan $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m | c - d$, maka $m | (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ atau $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

b. Karena $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b$ dan $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m | c - d$, maka $m | (a - b)c + b(c - d) = (ac - bd)$ atau $ac \equiv bd \pmod{m}$.Terbukti.

Berdasarkan sifat 2, dapat dibuktikan hal berikut.

Akibat Sifat 2

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka

a. $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$

b. $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, dengan k bulat positif.

c. $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$ dengan $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$

Sifat 3

Jika a, b, c dan m bilangan bulat yang memenuhi $ca \equiv cb \pmod{m}$ dan FPB(c, m) = 1, maka $a \equiv b \pmod{m}$.

Bukti

Karena $ca \equiv cb \pmod{m}$, maka untuk suatu bilangan bulat k berlaku $ca - cb = km$ (i)

Kemudian karena FPB (c, m) = 1, maka ada bilangan bulat x, y sedemikian sehingga

$xc + ym = 1$ atau $1 - ym = xc$ (ii)

Berdasarkan (i) dan (ii) berlaku

$(ca - cb)(1 - ym) = kmxc \Leftrightarrow c(a - b)(1 - ym) = kmxc$ (iii)

Selanjutnya, karena $c \neq 0$, maka persamaan (iii) menjadi

$(a - b)(1 - ym) = kmx \Leftrightarrow (a - b) - ym(a - b) = kmx$

$\Leftrightarrow (a - b) = ym(a - b) + kmx$

$\Leftrightarrow (a - b) = m(y(a - b) + kx)$ atau $m | a - b$. Ini berarti $a \equiv b \pmod{m}$.

Terbukti.

Contoh 4

Buktikan $(an + b)^m \equiv b^m \pmod{n}$!

Bukti

$$(an+b)^m - b^m = (an)^m + m(an)^{m-1}b + \ldots + m.an.b^{m-1} + b^m - b^m$$

$$= (an)^m + m(an)^{m-1}b + \ldots + m.an.b^{m-1}$$

$$= (a(an)^{m-1} + am(an)^{m-2}b + \ldots + am.b^{m-1})n$$

$$= kn$$

Ini berarti $n \mid (an+b)^m - b^m$ atau $(an + b)^m \equiv b^m \pmod{n}$. Terbukti.

Contoh 5

Dengan menggunakan konsep kekongruenan bilangan, tentukan angka satuan dari bilangan 1997^{1991}

Penyelesaian

Menentukan angka satuan dari bilangan 1997^{1991} sama dengan mencari sisa pembagian 1997^{1991} oleh 10.

Karena $7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10}$ dan $7^4 = 2421 \equiv 1 \pmod{10}$, maka

$$1997^{1991} = (199 \times 10 + 7)^{1991}$$

$$\equiv (7)^{1991} \pmod{10} \qquad \text{(Berdasarkan sifat pada Contoh 4)}$$

$$\equiv (7^4)^{497} 7^3 \pmod{10}$$

$$\equiv (1)^{497}.3 \pmod{10} \qquad \text{(Berdasarkan akibat sifat 2 dan sifat 2)}$$

$$\equiv 1 \times 3 \pmod{10}$$

$$\equiv 3 \pmod{10}$$

Jadi angka satuan dari bilangan 1997^{1991}adalah 3.

Contoh 6

Tentukan angka satuan dari bilangan 7^{7^7}

Penyelesaian

$7^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 7^7 = (7^2)^3.7 \equiv (1)^3.7 \equiv 3 \pmod{4}$, sehingga $7^7 = 4t + 3$, t bulat positif.

Dengan demikian $7^{7^7} = 7^{4t+3} = (7^4)^t 7^3 \equiv 1.3 \equiv 3 \pmod{10}$

Jadi angka satuan dari 7^{7^7} adalah 3.

Contoh 7

Tentukan dua angka terakhir dari bilangan 3^{2002}!

Penyelesaian

Menentukan dua angka terakhir dari bilangan 3^{2002} sama dengan mencari sisa pembagian 3^{2002} oleh 100.

$$
\begin{aligned}
3^{2002} &= (3^{5\times 400+2}) = (3^5)^{400}3^2 = (243)^{400}.9 \\
&\equiv (43)^{400} \times 9 \pmod{100} \\
&\equiv (1849)^{200} \times 9 \pmod{100} \\
&\equiv (49)^{200} \times 9 \pmod{100} \\
&\equiv (2401)^{100} \times 9 \pmod{100} \\
&\equiv (1)^{100} \times 9 \pmod{100} \\
&\equiv 9 \pmod{100}
\end{aligned}
$$

Jadi 2 angka terakhir dari 3^{2002} adalah 09.

Contoh 8

Tentukan sisa pembagian 33.26^2 oleh 31!

Penyelesaian

Karena $33 = (1.31+2) \equiv 2 \pmod{31}$ dan $26 \equiv -5 \pmod{31}$

Maka $33.26^2 \equiv 2(-5)^2 \pmod{31} = 50 \Leftrightarrow 33.26^2 \equiv 19 \pmod{31}$

Jadi sisa pembagian 33.26^2 oleh 31 adalah 19.

Contoh 9

Tentukan sisa pembagian $3(53)+27^2$ oleh 7!

Penyelesaian

Karena

$53 = (8.7 - 3) \equiv -3 \pmod 7$, sehingga $3(53) \equiv 3(-3) \pmod 7 \equiv -9 \pmod 7$

dan

$27 \equiv -1 \pmod 7$, sehingga $27^2 \equiv 1 \pmod 7$

Maka

$$3(53)+27^2 \equiv -9 + 1 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$$

Jadi sisa pembagian $3(53)+27^2$ oleh 7 adalah 6.

Contoh 10

Tentukan sisa pembagian 6^{1987} oleh 37

Penyelesaian

$6^{1987} \equiv 6(6)^{1986} \pmod{37}$

$\equiv 6(6^2)^{993} \pmod{37}$

$\equiv 6(-1)^{993} \pmod{37}$, karena $6^2 \equiv -1 \pmod{37}$

$\equiv -6 \equiv 31$ (mod 37)

Jadi sisa pembagian 6^{1987} oleh 37 adalah 31.

Contoh 11

Buktikan bahwa $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ habis dibagi 7 untuk semua bilangan asli *n*.

Penyelesaian

Perhatikan bahwa $3^{2n+1} = 9^n \cdot 3 = (7+2)^n \cdot 3 \equiv 2^n.3 \pmod{7}$ dan $2^{n+2} = 2^n.4$, maka

$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 2^n.3 + 2^n.4$

$\equiv 7.\ 2^n \pmod{7}$

$\equiv 0 \pmod{7}$

Terbukti bahwa $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ habis dibagi 7 untuk semua bilangan asli *n*.

Contoh 12

a. Tentukan semua bilangan bulat positif *n* sehingga $2^n - 1$ habis dibagi 7.
b. Buktikan tidak ada bilangan bulat positif *n* yang memenuhi 2^n+1 habis dibagi 7

Penyelesaian

a. Kita tinjau 3 kasus nilai *n* yang mungkin, yaitu $3k$, $3k+1$, $3k+2$, *k* bilangan asli.
   - Jika $n = 3k$, maka $2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{7}$, sehingga $2^{3k} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
     Ini berati $2^{3k} - 1$ habis dibagi 7.
   - Jika $n = 3k + 1$, maka $2^{3k+1} = 2(2^3)^k \equiv 2.1^k \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$, sehingga $2^{3k+1} - 1 \equiv 1 \pmod{7}$.
     Ini berati $2^{3k+1} - 1$ tidak habis dibagi 7.
   - Jika $n = 3k + 2$, maka $2^{3k+2} = 2^2(2^{3k}) \equiv 4(2^3)^k \equiv 4.1^k \pmod{7} \equiv 4 \pmod{7}$, sehingga $2^{3k+2} - 1 \equiv 3 \pmod{7}$.
     Ini berati $2^{3k+2} - 1$ tidak habis dibagi 7.

   Jadi nilai *n* yang memenuhi adalah semua bilangan asli yang merupakan bilangan kelipatan 3, yaitu 3, 6, 9, 12, ...

b. Bukti:

Untuk membuktikan pernyataan ini, juga dapat ditinjau dari 3 kasus nilai n seperti pada penyelesaian soal a dan berdasarkan penyelesaian pada soal a, diperoleh

$2^{3k}+1 \equiv 2 \pmod 7$

$2^{3k+1}+1 \equiv 3 \pmod 7$

$2^{3k+2}+1 \equiv 5 \pmod 7$

Karena semua kasus memberikan sisa jika dibagi 7, maka terbukti bahwa 2^n+1 tidak habis dibagi 7 untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 13

Tentukan semua nilai bilangan kuadrat sempurna modulo 13.

Penyelesaian

Perhatikan bahwa $a^2 \equiv (13-a)^2 \pmod{13}$ dengan a bilangan cacah, maka dalam hal ini cukup ditinjau 6 kuadrat bilangan cacah, yaitu $0^2 \equiv 0 \pmod{13}$, $1^2 \equiv 1 \pmod{13}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{13}$, $3^2 \equiv 9 \pmod{13}$, $4^2 \equiv 3 \pmod{13}$, $5^2 \equiv 12 \pmod{13}$, $6^2 \equiv 10 \pmod{13}$. Jadi nilai-nilai bilangan kuadrat sempurna modulo 13 adalah 0, 1, 3, 9, 10, 12.

Contoh 14

Selidiki apakah ada pasangan bulat (x, y) yang memenuhi $x^2 - 5y^2 = 2$!

Penyelesaian

Karena $x^2 - 5y^2 = 2$, maka $x^2 = 2 + 5y^2$. Ini berarti $x^2 \equiv 2 \pmod 5$. Sedangkan 2 bukan bilangan kuadrat sempurna modulo 5, maka tidak ada bilangan bulat x yang memenuhi. Jadi tidak ada pasangan bulat (x, y) yang memenuhi $x^2 - 5y^2 = 2$.

Contoh 15

Tentukan semua pasangan terurut bilangan bulat positif (x_1, x_2, ..., x_{14}) yang memenuhi persamaan

$$x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 2015$$

Penyelesaian

Karena $x_i^4 \equiv 0$ atau 1 (mod 16), x_i bilangan bulat tak negatif dan i = 1, 2, ..., 14, maka nilai maksimum dari $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4$ adalah 14 mod 16.

Sedangkan 2015 ≡ 15 mod 16. Dengan demikian tidak ada pasangan terurut bilangan bulat tak negatif (x_1, x_2, ..., x_{14}) yang memenuhi persamaan pada soal.

Latihan soal

1. Carilah sisa pembagian 14^{30} oleh 11. (Menuju Olimpiade Sains Indonesia 3+)
2. Berapakah sisa pembagian $6^{273} + 8^{273}$ oleh 49?(Menuju Olimpiade Sains Indonesia 3+).
3. Misalkan A = $3^{105}+ 4^{105}$. Tunjukkan bahwa $7 \mid A$. Tentukan A modulo 11 dan A modulo 13!
4. Tunjukkan bahwa $5555^{2222} + 2222^{5555}$ habis dibagi 7.
5. Berapakan sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100? (Seleksi Awal Calon Anggota Tim Olimpiade Matematika 2003)
6. Tentukan tiga angka terakhir 777^{333}
7. Buktikan bahwa $4^{3x+1} + 2^{3x+1} + 1$ habis dibagi 7
8. Buktikan bahwa $3.5^{2m+1} + 2^{3m+1}$ habis dibagi 17 untuk semua m bilangan bulat tak negatif.
9. Jika m dan n bilangan asli sedemikian sehingga $A = \dfrac{(m+3)^n + 1}{3m}$ merupakan bilangan bulat, buktikan bahwa A bilangan ganjil.
10. Selidiki apakah ada pasangan bulat (x, y) yang memenuhi $x^5 = y^2 + 4$.

Rujukan:

1. Andreescu, Titu and Zuming Feng. 2000. *Mathematical Olypiads 1998-1999*. United State of America: The Mathematical Association of America.
2. Dharmawi, Handra, dkk. 2007. *Jago Olimpiade Matematika*. Gading Serpong-Tangerang, Banten: i Publishing
3. dsantos@cpp.edu. David A, Santos. 2007. *Number Theory to Mathematical Contest.* GNU Free Documentation License. Diakses tanggal 11 Agustus 2008 pukul 10.00 wita.
4. Engel, A. 1998. *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer Verlag.
5. Larson, L, C. 1983. *Problem-Solving Through Problems*. New York: Springer-Verlag.
6. Setia Budhi, Wono. 2003. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta Selatan: CV Ricardo
7. Yao Tung, Khoe. 2008. *Memahami Teori Bilangan dengan Mudah dan Menarik*. Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.