MA637430 Analisis Deret Waktu | **Universitas Udayana**
Semester Ganjil 2018/2019 | **Program Studi Matematika**

Kuliah 3: Pengantar Proses Stasioner

Koordinator Tim: I Wayan Sumarjaya (sumarjaya@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching I: I Gusti Ayu Made Srinadi (srinadi@unud.ac.id)
Anggota Tim Teaching II: Made Susilawati (mdsusilawati@unud.ac.id)

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah
Mahasiswa mampu membandingkan konsep proses stasioner dan nonstasioner (S5, KU1, KK1, PP1)

Kemampuan Akhir yang Diharapkan
Mahasiswa mampu membandingkan proses stasioner sebagai bagian dari proses linear dan mendemonstrasikan dengan perangkat lunak R (C4, P2, A2)

Indikator

1. Ketepatan membandingkan proses stasioner dan proses nonstasioner
2. Ketepatan membedakan masing-masing proses stasioner
3. Ketepatan menggunakan R untuk mensimulasikan proses stasioner
4. Ketepatan membedakan masing-masing proses stasioner dengan melihat sifat fungsi autokovarians dan autokorelasi

Bahan Kajian/Materi Ajar

1. Konsep proses stokastik
2. Konsep proses stasioner (stasioner kuat dan stasioner lemah)
3. Fungsi autokovarians dan autokorelasi sampel

Pada Kuliah 1 dan 2, kita telah membicarakan konsep analisis deret waktu, eksplorasi data deret waktu, dan metode dekomposisi klasik. Pada kebanyakan kasus, pendekatan dekomposisi klasik tidaklah tepat untuk data yang berfluktuasi tinggi atau data yang kita anggap sebagai realisasi dari proses stokastik. Pada kuliah ini dan kuliah-kuliah selanjutnya, kita akan membahas pemodelan dengan proses stokastik. Materi-materi ini meliputi konsep proses stokastik, proses stasioner, dan proses linear.

3.1 Konsep Proses Stokastik

Langkah pertama dalam analisis deret waktu adalah memilih model matematika yang sesuai untuk data. Biasanya adalah suatu hal yang alamiah apabila kita mengganggap masing-masing observasi masa depan yang tidak diketahui sebagai realisasi dari suatu peubah acak tertentu. Dengan kata lain, x_t adalah suatu nilai realisasi dari peubah acak tertentu X_t. Lebih lanjut deret waktu $\{x_t, t \in T_0\}$ adalah realisasi dari peubah acak $\{X_t, t \in T_0\}$. Berikut ini akan diberikan definisi proses stokastik secara formal.

Definisi 3.1.1 (Brockwell and Davis (1991))**.** Suatu proses stokastik adalah keluarga peubah $\{X_t, t \in T\}$ yang didefinisikan pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definisi 3.1.2 (Brockwell and Davis (1991))**.** Fungsi $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ pada T disebut realisasi atau lintasan sampel (*sample-paths*) dari proses $\{X_t, t \in T\}$.

Beberapa catatan (lihat Brockwell and Davis (1991)):

1. Pada analisis deret waktu himpunan indeks atau parameter T adalah himpunan titik-titik waktu, biasanya $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\{1, 2, 3, \dots\}$, $[0, \infty)$, atau $(-\infty, \infty)$. Himpunan indeks T biasanya himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

2. Istilah deret waktu biasanya mengacu pada data dan realisasi dari proses.

Contoh 3.1.1. Misalkan A dan Θ adalah peubah-peubah acak bebas dengan $A \geq 0$ dan Θ berdistribusi secara seragam pada $[0, 2\pi)$. Suatu proses stokastik $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ dapat didefinisikan untuk $v \geq 0$ dan $r > 0$ oleh

$$X_t = r^{-1} A \cos(vt + \Theta). \tag{3.1}$$

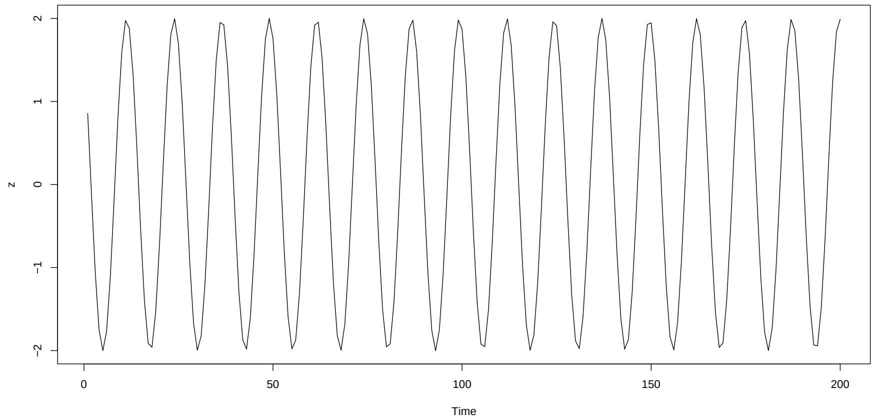
Salah satu realisasi Persamaan (3.1) adalah

$$X_t = 2\cos(0{,}5t + 0{,}2\pi). \tag{3.2}$$

Misalkan akan dibangkitkan 200 amatan yang merupakan realisasi dari Persamaan (3.2):

```
> t <- 1:200
> x <- 2*cos(0.5*t + 0.2*pi)
> plot.ts(x)
```

Gambar 3.1 memperlihatkan realisasi dari proses (3.2).



Gambar 3.1: Plot 200 amatan dari realisasi $X_t = 2\cos(0{,}5t + 0{,}2\pi)$.

3.2 Konsep Proses Stasioner

Salah satu konsep penting dalam proses stokastik adalah proses stasioner. Berikut ini akan diberikan definisi tentang stasioner kuat dan stasioner lemah.

Definisi 3.2.1 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Misalkan $\{X_t\}$ adalah suatu deret waktu dengan $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty$. Fungsi nilai tengah (*mean function*) deret $\{X_t\}$ adalah

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}(X_t). \tag{3.3}$$

Definisi 3.2.2 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Fungsi kovarians (*covariance function*) $\{X_t\}$ adalah

$$\begin{aligned}\gamma_X(r,s) &= \mathrm{cov}(X_r, X_s)\\ &= \mathrm{E}[(X_r - \mu_X(r))(X_s - \mu_X(s))].\end{aligned} \tag{3.4}$$

untuk semua bilangan bulat r dan s.

Definisi 3.2.3 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Suatu deret waktu $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ dikatakan stasioner kuat (*strong stationary*) jika distribusi bersama $(X_1, \ldots, X_n)$ dan $(X_{1+h}, \ldots, X_{n+h})$ adalah sama untuk semua bilangan bulat h dan $n > 0$.

Definisi 3.2.4 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Suatu deret waktu $\{X_t\}$ dikatakan stasioner lemah (*weakly stationary*) jika

1. $\mu_X(t)$ bebas dari t,

2. $\gamma_X(t+h, t)$ bebas dari t untuk masing-masing h.

Secara garis besar, suatu deret waktu $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ dikatakan stasioner jika deret tersebut memiliki sifat-sifat statistika seperti deret waktu-bergeser (*time-shifted*) $\{X_{t+h}, t = 0, \pm 1, \dots\}$ untuk setiap bilangan bulat h.

Berikut ini beberapa catatan yang perlu diperhatikan.

1. Stasioner kuat (*strong stationary*) disebut pula stasioner tegas (*strictly stationary*) atau stasioner lengkap (*completely stationary*).
2. Stasioner lemah (*weakly stationary*) disebut pula stasioner kovarians (*covariance stationary*) atau stasioner tingkat dua (*second order weakly stationary*).
3. Jika deret waktu $\{X_t\}$ stasioner kuat dan $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty$ untuk semua t, maka $\{X_t\}$ juga stasioner lemah.
4. Istilah stasioner biasanya mengacu kepada stasioner lemah seperti pada Definisi 3.2.4, kecuali dikatakan lain.
5. Bersesuaian dengan kondisi (2) pada Definisi 3.2.4 istilah fungsi kovarians yang mengacu kepada suatu deret stasioner $\{X_t\}$ maka yang dimaksud fungsi γ_X dari suatu peubah yang didefinisikan oleh
$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = \gamma_X(t + h, t). \tag{3.5}$$
Fungsi $\gamma_X(\cdot)$ disebut *fungsi autokovarians* adalah fungsi autokovarians pada nilai beda kala (*lag*) h.

Definisi 3.2.5 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret waktu stasioner. Fungsi autokovarians $\{X_t\}$ pada beda kala h adalah

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \mathrm{cov}(X_{t+h}, X_t)\\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h} - \mu_X(t+h))(X_t - \mu_X(t))].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Definisi 3.2.6. Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret waktu stasioner. Fungsi autokorelasi $\{X_t\}$ pada beda kala h adalah

$$\begin{aligned}\rho_X(h) &= \mathrm{cor}(X_{t+h}, X_t)\\ &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Diskusi: Misalkan X, Y, dan Z peubah acak. Jika $\mathrm{E}(X^2) < \infty$, $\mathrm{E}(Y^2) < \infty$, $\mathrm{E}(Z^2) < \infty$, dan a, b, serta c adalah sebarang konstanta bilangan real, maka

$$\mathrm{cov}(aX + bY + c, Z) = a\mathrm{cov}(X, Z) + b\mathrm{cov}(Y, Z). \tag{3.8}$$

Sifat pada Persamaan (3.8) disebut sifat linear kovarians (*linearity property of covariance*). Coba Anda buktikan! Sifat-sifat varians, kovarians, dan korelasi dapat dilihat pada lampiran bab ini.

Contoh 3.2.1. Model paling sederhana untuk suatu deret waktu stasioner adalah model tanpa pengaruh tren dan musiman dengan amatan-amatan peubah-peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik (*independent and identically distributed*) dengan nilai tengah nol. Barisan peubah acak $X_1, X_2, \ldots$ yang memiliki sifat ini disebut IID *noise*. Jika deret $\{X_t\}$ adalah IID *noise* dan $\mathrm{E}(X_t^2) = \sigma^2 < \infty$ maka sifat pertama jelas dipenuhi karena $\mathrm{E}(X_t) = 0$ untuk semua t. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{cov}(X_{t+h}, X_t)\\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h} - \mu(X_{t+h}))(X_t - \mu(X_t))]\\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h} - 0)(X_t - 0)]\\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h}X_t)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

Apabila $h = 0$, maka Persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t,t) &= \mathrm{E}[(X_{t+0}X_t)]\\ &= \mathrm{E}[(X_t^2)]\\ &= \sigma^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Apabila $h = -1$, maka Persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t-1,t) &= \mathrm{E}[(X_{t-1}X_t)]\\ &= \mathrm{E}(X_{t-1})\mathrm{E}(X_t)\\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Selanjutnya, apabila $h = 1$, maka Persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+1,t) &= \mathrm{E}[(X_{t+1}X_t)]\\ &= \mathrm{E}(X_{t+1})\mathrm{E}(X_t)\\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dengan demikian nilai $\gamma_X(t+h,t)$ akan selalu bernilai 0 apabila $|h| \neq 0$. Berdasarkan Persamaan (3.10), (3.11), dan (3.12) diperoleh

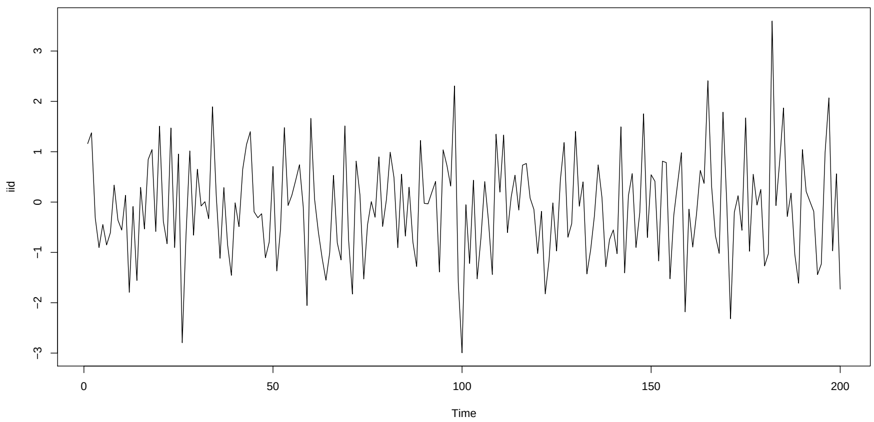
$$\gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{jika } h = 0;\\ 0, & \text{jika } h \neq 0; \end{cases} \tag{3.13}$$

yang tidak tergantung pada t. Jadi IID *noise* dengan momen kedua hingga adalah stasioner dan dinotasikan

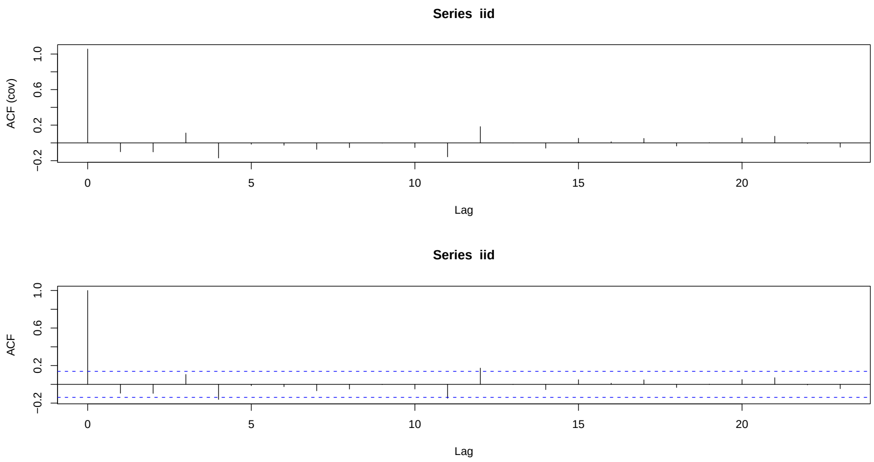
$$\{X_t\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2). \tag{3.14}$$

Berikut ini 200 realisasi $\mathrm{IID}(0, 1)$ (lihat Gambar 3.2).

```
> iid <- rnorm(200,0,1)
> plot.ts(iid)
```



Gambar 3.2: Plot 200 realisasi $\mathrm{IID}(0,1)$.



Gambar 3.3: Fungsi autokovarians dan autokorelasi IID noise.

Gambar 3.3 memperlihatkan fungsi autokovarians dan autokorelasi IID *noise*.

Contoh 3.2.2. Jika $\{X_t\}$ adalah barisan peubah-peubah acak yang tidak berkorelasi, masing-masing dengan nilai tengah 0 dan varians σ^2, maka $\{X_t\}$ juga stasioner dengan fungsi kovarians yang sama seperti IID *noise* pada Contoh 3.2.1. Barisan ini disebut derau putih (*white noise*) dengan nilai tengah 0 dan varians σ^2, dinotasikan

$$\{X_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2). \tag{3.15}$$

Contoh 3.2.3. Langkah acak (*random walk*) $\{S_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$, dimulai dari 0, diperoleh dengan menjumlahkan secara kumulatif peubah-peubah acak IID. Dengan demikian suatu langkah acak dengan nilai tengah 0 diperoleh dengan mendefinisikan $S_0 = 0$ dan

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_t, \quad \text{untuk } t = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

dengan $\{X_t\}$ adalah IID *noise*. Jika $\{S_t\}$ adalah langkah acak dan $\{X_t\}$ adalah IID *noise* maka

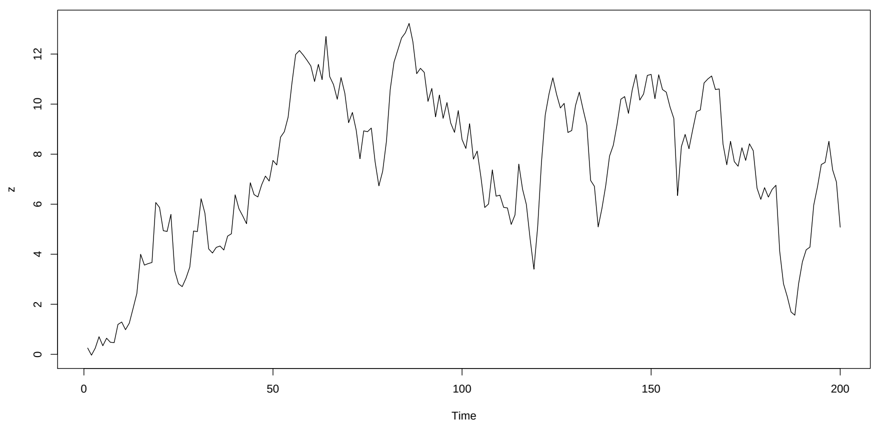
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S_t) &= \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_t) \\ &= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_t) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 \\ &= 0; \end{aligned} \tag{3.17}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S_t^2) &= \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_t)^2 \\ &= \mathrm{E}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_t^2 + X_1X_2 + \cdots + X_{t-1}X_t) \\ &= \mathrm{E}(X_1^2) + \mathrm{E}(X_2^2) + \cdots + \mathrm{E}(X_t^2) + 0 + \cdots + 0 \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 \\ &= t\sigma^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pada Persamaan (3.18) $\mathrm{E}(S_t^2) = t\sigma^2 < \infty$ untuk semua t. Selanjutnya akan kita hitung fungsi autokovarians sampel

$$\begin{aligned} \gamma_X(t+h, t) &= \mathrm{cov}(S_{t+h}, S_t) \\ &= \mathrm{cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{t+h}, S_t) \\ &= \mathrm{cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}, S_t) \\ &= \mathrm{cov}(S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}, S_t) \\ &= \mathrm{E}[(S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h} - \mu(S_t + X_{t+1} \cdots + X_{t+h}))(S_t - \mu(S_t))] \\ &= \mathrm{E}[(S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h} - 0))(S_t - 0)] \\ &= \mathrm{E}[(S_t^2 + S_tX_{t+1} + \cdots + S_tX_{t+h})]. \end{aligned} \tag{3.19}$$



Gambar 3.4: Plot 200 realisasi langkah acak.

Dengan demikian untuk $h \geq 0$ Persamaan (3.19) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{E}(S_t^2) + \mathrm{E}(S_t)\mathrm{E}(X_t) + \cdots + \mathrm{E}(S_t)\mathrm{E}(X_{t+h}) \\ &= \mathrm{E}(S_t^2) \\ &= t\sigma^2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mengingat $\gamma_X(t+h,t)$ bergantung pada t, maka $\{S_t\}$ tidaklah stasioner. Sebagai ilustrasi kita akan membangkitkan 200 realisasi dari langkah acak (lihat Gambar 3.4).

```
> x <- rnorm(200,0,1)
> x <- cumsum(x)
> plot.ts(x)
```

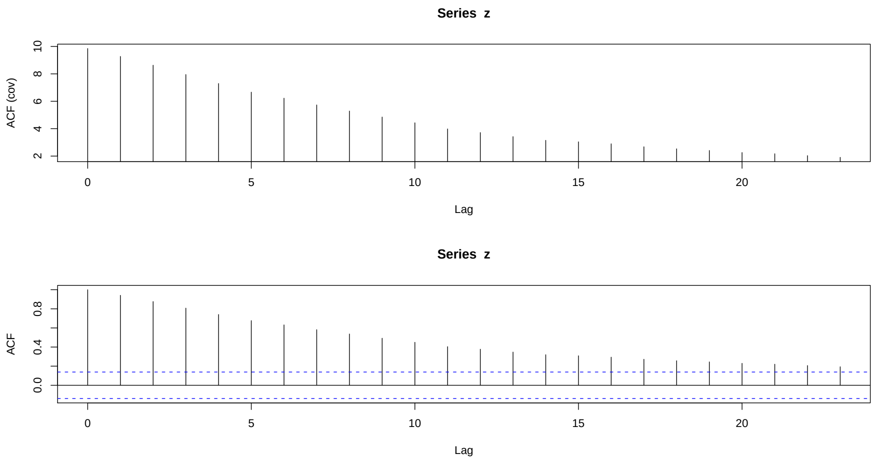
Gambar 3.5 memperlihatkan fungsi autokovarians dan autokorelasi langkah acak.

```
> acf(x,type="covariance")
> acf(x)
```

Contoh 3.2.4. Misalkan suatu deret waktu didefinisikan oleh

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \quad t = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{3.21}$$

dengan $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$ dan θ adalah konstanta bilangan real. Berdasarkan Persamaan (3.21)



Gambar 3.5: Fungsi autokovarians dan autokorelasi langkah acak.

dapat dihitung

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_t) &= \mathrm{E}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X_t) &= \mathrm{var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \mathrm{var}(\varepsilon_t) + \theta^2\mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}) + 2\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 \\ &= \sigma^2(1+\theta^2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Berdasarkan Persamaan (3.23) diperoleh $\mathrm{E}(X_t^2) = \sigma^2(1+\theta^2) < \infty$. Kemudian kita dapat menghitung fungsi autokovarians X_t, yakni

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{E}[(X_{t+h} - \mu(X_{t+h}))(X_t - \mu(X_t))] \\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h} - 0)(X_t - 0)] \\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h}X_t)] \\ &= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \end{aligned} \tag{3.24}$$

Untuk $h = 0$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{E}[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\ &= \mathrm{E}[(\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2)] \\ &= \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + 2\theta\mathrm{E}(\varepsilon_t)\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) + \theta^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) \\ &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 \\ &= \sigma^2(1+\theta^2). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Selanjutnya untuk $h = 1$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t+1,t) &= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t+1} + \theta\varepsilon_t)(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_t\varepsilon_t + \theta^2\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1})\mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta\mathrm{E}(\varepsilon_{t+1})\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) + \theta\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \theta^2\mathrm{E}(\varepsilon_t)\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) \\
&= 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 \\
&= \theta\sigma^2. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $h = -1$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t-1,t) &= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \theta^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1})\mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2})\mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2})\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) \\
&= 0 + \theta\sigma^2 + 0 + 0 \\
&= \theta\sigma^2. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dihitung untuk $|h| > 1$ nilai $\gamma_X(t+h,t) = 0$. (Coba Anda periksa untuk $h = \pm 2$ dan $h = \pm 3$). Dengan demikian fungsi autokovariansnya adalah

$$\gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & \text{jika } h = 0; \\ \sigma^2\theta, & \text{jika } h = \pm 1; \\ 0, & \text{jika } |h| > 1. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Dengan demikian deret waktu X_t adalah stasioner. Kemudian, fungsi autokorelasi $\{X_t\}$ dapat dihitung untuk masing-masing h. Mengingat $\gamma_X(0) = \gamma_X(0,0) = \gamma_X(t+0,t) = \sigma^2(1+\theta^2)$, maka untuk $h = 0$

$$\rho_X(0) = \frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = 1. \qquad (3.29)$$

Untuk $h = 1$, $\gamma_X(1) = \gamma_X(t+1,t) = \theta\sigma^2$ sehingga

$$\begin{aligned}
\rho_X(1) &= \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta^2)}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Untuk $h = -1$, $\gamma_X(-1) = \gamma_X(t-1,t) = \theta\sigma^2$ sehingga

$$\begin{aligned}
\rho_X(-1) &= \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta^2)}. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Untuk $|h| > 1$, nilai $\gamma_X(h) = 0$. Jadi

$$\rho_X(h) = \begin{cases} 1, & \text{jika } h = 0; \\ \dfrac{\theta}{(1+\theta^2)}, & \text{jika } h = \pm 1; \\ 0, & \text{jika } |h| > 1. \end{cases} \tag{3.32}$$

Proses pada Persamaan (3.21) disebut proses rerata bergerak (*moving average*) tingkat satu, dinotasikan MA(1). Berikut akan disimulasikan 200 realisasi MA(1) dengan $\theta = 0{,}6$ dan $\theta = -0{,}6$.

```
> par(mfrow=c(2,1))
> plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1),ma=0.6), n=200),ylab="x",main="theta =
0,6")
> plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1),ma=-0.6), n=200),ylab="x",main="theta
= -0,6")
```

Gambar 3.6 memperlihatkan realisasi dari MA(1) dengan $\theta = \pm 0{,}6$.

3.3 Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi Sampel

Kita telah melihat bagaimana cara menghitung fungsi autokorelasi dan autokovarians untuk beberapa model deret waktu sederhana. Dalam praktik kita tidak memulai dengan sebuah model, tetapi dengan data amatan $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Untuk mengetahui tingkat ketergantungan pada data dan memilih model untuk data kita akan menggunakan fungsi autokorelasi sampel. Jika kita yakin bahwa data adalah nilai realisasi dari suatu data deret waktu stasioner $\{X_t\}$, maka fungsi autokorelasi sampel akan memberikan estimasi terhadap fungsi autokorelasi $\{X_t\}$. Estimasi ini memberikan informasi model-model deret waktu stasioner yang cocok untuk mewakili ketergantungan pada data. Sebagai contoh, suatu fungsi autokorelasi sampel yang hampir nol untuk beda kala (*lag*) yang tidak nol menunjukkan model yang sesuai untuk data mungkin IID *noise*.

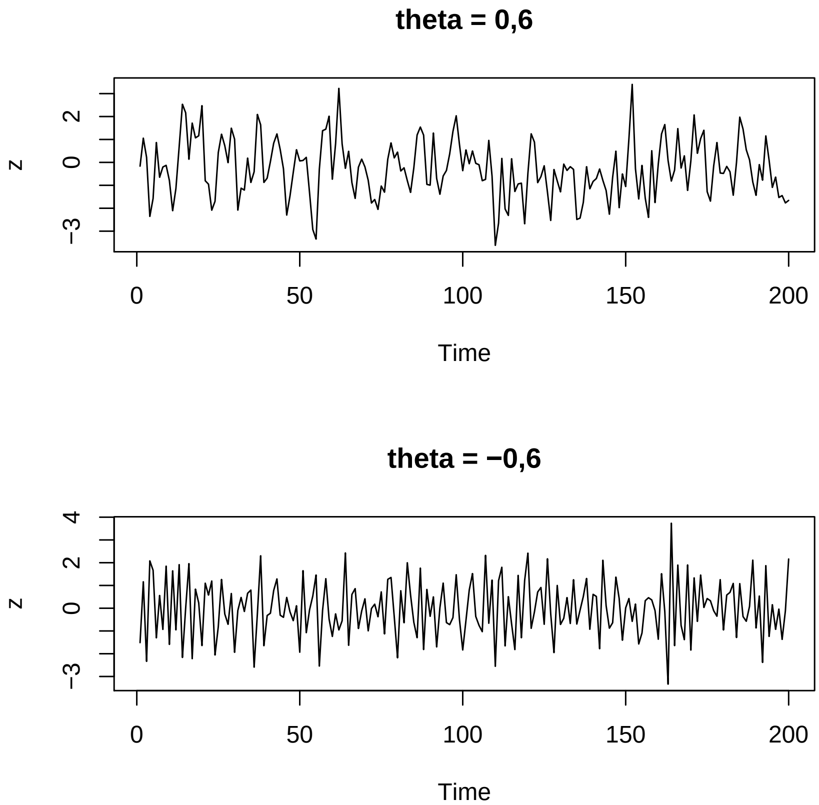
Definisi 3.3.1 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Misal $x_1, \ldots, x_n$ adalah amatan-amatan dari suatu deret waktu. Rerata sampel dari $x_1, \ldots, x_n$ adalah

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t. \tag{3.33}$$

Definisi 3.3.2 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Fungsi autokovarians sampel didefinisikan sebagai

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}), \quad -n < h < n, \tag{3.34}$$

dengan $\hat{\gamma}(-h) = \hat{\gamma}(h)$.



Gambar 3.6: Plot MA(1) untuk $\theta = 0{,}6$ dan $\theta = -0{,}6$.

Definisi 3.3.3 (Brockwell dan Davis, 2002)**.** Fungsi autokorelasi sampel didefinisikan sebagai

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad -n < h < n. \tag{3.35}$$

Berikut ini beberapa catatan penting untuk fungsi autokorelasi dan autokovarians sampel (lihat Brockwell dan Davis (2002)).

1. Untuk $h \geq 0$, fungsi autokorelasi sampel $\hat{\gamma}(h)$ hampir sama atau mendekati kovarians sampel $n - h$ pasangan amatan $(x_1, x_{1+h}), (x_2, x_{2+h}), \ldots, (x_{n-h}, x_n)$. Perbedaan muncul pada saat penggunaan pembagi n dibandingkan $n - h$ dan pengurangan rata-rata keseluruhan (*overall mean*) $\bar{x}$ dari masing-masing faktor pada penjumlahan. Penggunaan pembagi n menjamin bahwa matriks kovarians sampel $\hat{\Gamma}_n = [\hat{\gamma}(i-j)]_{i,j=1}^n$ adalah definit positif. Jumlah pada Persamaan (3.34) berjalan pada jangka terbatas karena x_{t+h} tidak tersedia untuk $t + h > n$ (Shumway dan Stoffer, 2006).

2. Matriks korelasi sampel $\hat{R}_n = [\hat{\rho}(i-j)]_{i,j=1}^n$ adalah definit positif. Masing- masing elemen diagonalnya sama dengan 1, karena $\hat{\rho}(0) = 1$.

3. Fungsi autokovarians dan autokorelasi sampel dapat dihitung untuk sebarang kumpulan data $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dan tidak terbatas hanya untuk amatan deret waktu stasioner. Untuk data yang mengandung tren $|\hat{\rho}(h)|$ akan menurun secara lambat seiring naiknya h, dan untuk data dengan komponen periodik deterministik $\hat{\rho}(h)$ akan menunjukkan tingkah laku serupa dengan periode yang sama.

3.4 Proses-proses Linear

Definisi 3.4.1. Suatu proses linear X_t didefinisikan sebagai suatu kombinasi linear dari variat derau putih (*white noise*) W_t, yakni

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j} \tag{3.36}$$

dengan $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Fungsi autokovarians proses linear pada Persamaan (3.36) adalah

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{j+h}\psi_j. \tag{3.37}$$

Model-model proses linear seperti rerata bergerak (MA), proses autoregresif (AR), dan proses rerata bergerak autoregresif (ARMA) akan dibicarakan pada bab selanjutnya.

3.5 Lampiran: Varians, Kovarians, dan Korelasi

3.5.1 Sifat-sifat Varians

Berikut ini sifat-sifat penting varians:

1. $\mathrm{var}(X) \geq 0$,
2. $\mathrm{var}(a + bX) = b^2\mathrm{var}(X)$,
3. Jika X dan Y saling bebas, maka $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

Coba Anda buktikan sifat-sifat di atas!

3.5.2 Sifat-sifat Kovarians

Sifat-sifat penting kovarians adalah sebagai berikut:

1. $\mathrm{cov}(a + bX, c + dY) = bd\,\mathrm{cov}(X, Y)$,
2. $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$,
3. $\mathrm{cov}(X + Y, Z) = \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)$,
4. $\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{var}(X)$,
5. $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$,
6. Jika X dan Y saling bebas, $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Coba Anda buktikan sifat-sifat di atas!

3.5.3 Sifat-sifat Korelasi

Sifat-sifat penting korelasi adalah sebagai berikut: $-1 \leq \mathrm{cor}(X, Y) \leq 1$ dan

$$\mathrm{cor}(a + bX, c + dY) = \mathrm{sign}(bd)\mathrm{cor}(X, Y) \tag{3.38}$$

dengan

$$\mathrm{sign}(bd) = \begin{cases} 1, & \text{jika } bd > 0, \\ 0, & \text{jika } bd = 0, \\ -1, & \text{jika } bd < 0. \end{cases}$$

3.5.4 Sifat-sifat Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi

Berikut ini adalah sifat-sifat penting fungsi autokovarians:

1. $\gamma(t,t) = \text{var}(X_t)$,
2. $\gamma(t,s) = \gamma(s,t)$,
3. $|\gamma(t,s)| \leq \sqrt{\gamma(t,t)\gamma(s,s)}$.

Untuk fungsi autokorelasi:

1. $\rho(t,t) = 1$,
2. $\rho(t,s) = \rho(s,t)$,
3. $|\rho(t,s)| \leq 1$.

Jika $\rho(t,s) = 0$, maka X_t dan X_s tidak berkorelasi.

3.6 Pengayaan

Buku-buku seperti Cryer and Chan (2008), Shumway and Stoffer (2011), Brockwell and Davis (2016), dan Box et al. (2016) dapat digunakan untuk pengayaan lebih lanjut.

3.7 Latihan

1. Misalkan $\text{E}(X) = 4$, $\text{var}(X) = 3$, $\text{E}(Y) = 0$, $\text{var}(Y) = 4$, dan $\text{cor}(X,Y) = 0{,}35$. Hitung:
   (a) $\text{var}(X+Y)$
   (b) $\text{cov}(X, X+Y)$
   (c) $\text{cov}(X+Y, Y)$
   (d) $\text{cor}(X+Y, X-Y)$
2. Jika X dan Y tidak saling bebas, tetapi $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$. Hitunglah $\text{cov}(X+Y, X-Y)$.
3. Misalkan $X_t = 5 + 2t + W_t$ dengan W_t adalah deret stasioner dengan fungsi autokovarians $\gamma(h)$.
   (a) Hitunglah fungsi nilai tengah untuk $\{X_t\}$.

(b) Fungsi autokovarians untuk $\{X_t\}$.

(c) Apakah $\{X_t\}$ stasioner?

4. Misalkan peubah acak A memiliki nilai tengah 0 dan varians 1 dan θ adalah peubah acak yang berdistribusi seragam pada selang $[-\pi, \pi]$ dan bebas dari A. Apakah model-model deret waktu berikut stasioner?

   (a) $X_t = (-1)^t A$;

   (b) $X_t = A \sin(\omega t + \theta)$;

   (c) $X_t = A \sin(2\pi t + \theta)$.

Daftar Pustaka

George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Inc.,, Hoboken, New Jersey, fifth edition, 2016.

Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. ISBN 0-387-97429-6.

Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York, third edition, 2016.

Jonathan D Cryer and Kung-Sik Chan. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York, second edition, 2008.

Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications with R Examples*. Springer, New York, 2011.