Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

Pertemuan 02 : Review Aljabar Linier

Oleh : Koredianto Usman

Versi : Juni 2020

Review Aljabar Linier

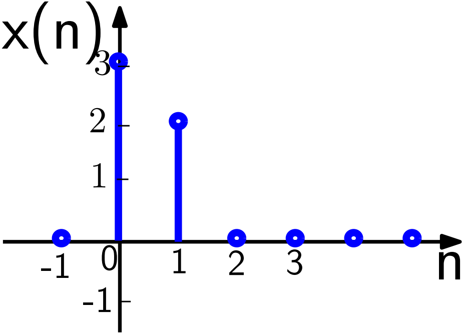
1. Aljabar Linier adalah ilmu tentang matriks dan vektor
2. Aljabar Linier adalah ilmu pondasi dari pengolahan sinyal, karena sinyal dapat direpresentasikan dengan vektor dan proses pada sistem dapat direpresentasikan dengan operasi matriks.
3. Pada Slide 2 ini akan dibahas beberapa hal dasar dalam Vektor dan Matriks

Vektor

1. Vektor adalah aljabar linier adalah kumpulan data yang tersusun dalam satu kolom
2. Vektor dinotasikan dengan **huruf kecil** dan **tebal**.
3. Contoh vektor: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$
4. Panjang vektor adalah jumlah elemen dalam vektor. Untuk contoh di atas, vektor **x** memiliki panjang 2 dan vektor **y** memiliki panjang 3.

Vektor

1. Deretan sinyal dapat direpresentasikan pula dengan vektor. Contoh sinyal berikut



dapat direpresentasikan secara **compact** dengan vektor:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriks

1. Matriks adalah kumpulan data 2 dimensi atas baris dan kolom
2. Matriks dinotasikan dengan **huruf besar** dan **tebal**.
3. Sebagai contoh: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
4. Dimensi matriks menyatakan **banyaknya baris** $\times$ **banyaknya kolom**
5. Sebagai contoh, matriks **A** di atas memiliki dimensi 2×2, dan matriks **B** di atas memiliki dimensi 3×2

Operasi Matriks

1. Operasi telah dipelajari di MK Aljabar Linier, seperti:
2. Penjumlahan Matriks
3. Pengurangan Matriks
4. Perkalian Matriks dengan skalar
5. Perkalian Matriks dengan matriks
6. Inversi Matriks
7. Transpose dan Hermitian
8. Properti matriks seperti Nilai Eigen, Trace, Determinan, dan sebagainya

Matriks khusus

I. Matriks Identitas

- Matriks Identitas: sebagai contoh $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas dengan dimensi 2×2
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas dengan dimensi 3×3

II. Matriks Diagonal

- Matriks diagonal adalah matriks yang elemen diagonal utamanya (DARI KIRI ATAS KE KANAN BAWAH) adalah tak nol (tidak semuanya nol), dan elemen lain adalah nol.

  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks diagonal 2×2
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks diagonal 3×3

Matriks khusus

III. Matriks Segitiga Atas

- Adalah matriks dengan elemen segitiga atasnya tak nol elemen lainnya nol. $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks segitiga atas 2×2
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks segitiga atas 3×3

IV. Matriks Segitiga bawah

- Adalah matriks dengan elemen segitiga bawahnya tak nol elemen lainnya nol. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks segitiga bawah 2×2
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks segitiga bawah

Matriks khusus

V. Matriks Simetri

- Adalah matriks dengan nilai simetri relatif terhadap diagonal utama. $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks simetri 2×2
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks simetri 3×3
- Matriks simetri memiliki sifat bahwa: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$

Matriks khusus

VI. Matriks Orthogonal

- Matriks Orthogonal adalah matriks yang setiap kolomnya saling orthogonal
- Orthogonal terjadi jika inner product bernilai nol
- Contoh Matriks Orthogonal dimensi 2×2: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
- Matriks ini orthogonal karena kolom pertama: $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ orthogonal dengan kolom kedua: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- inner product $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \times 3 + (-3) \times 1 = 0$

Matriks khusus

VII. Matriks Orthonormal

- Matriks Matriks Orthonormal adalah matriks yang setiap kolomnya saling orthogonal **DAN** panjang norm orde 2 dari matriks tersebut adalah 1.
- Contoh Matriks Normal dimensi 2×2: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(10)}} & \frac{3}{\sqrt{(10)}} \\ \frac{-3}{\sqrt{(10)}} & \frac{1}{\sqrt{(10)}} \end{bmatrix}$
- Matriks ini orthonormal karena kedua kolomnya orthogonal dan panjang norm orde 2 dari setiap kolom adalah 1.
- Norm orde 2 dari kolom pertama adalah :
$||\mathbf{a_1}||_2 = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{(10)}})^2 + (\frac{-3}{\sqrt{(10)}})^2} = 1$

Matriks khusus

VIII. Matriks Unitary

- Matriks Unitary adalah matriks orthonormal dengan dimensi persegi $N \times N$
- Matriks yang dicontohkan sebelumnya: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt(10)} & \frac{3}{\sqrt(10)} \\ \frac{-3}{\sqrt(10)} & \frac{1}{\sqrt(10)} \end{bmatrix}$
- Adalah matriks unitary, karena Orthonormal dan dimensinya 2×2 (persegi)
- Matriks Unitary memiliki sifat khusus yaitu: Inverse matriks unitary adalah transpose dari matriks tersebut: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$; $\mathbf{A}$ adalah suatu matriks unitary.
- Matriks unitary memudahkan perhitungan inverse karena inverse diperoleh cukup dengan mentranspose matriks tersebut

Matriks khusus

IX. Matriks Toeplitz

- Matriks Toeplitz adalah matriks terpenting dalam materi Pengolahan Sinyal Lanjut ini.
- Matriks Toeplitz adalah matriks simetri baik pada diagonal utama maupun diagonal minor **DAN** elemen pada diagonal utamanya adalah konstan.
- Contoh matriks Toeplitz adalah: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
- Matriks Toeplitz misalnya dibangkitkan dari fungsi autokorelasi.

Matriks khusus

IX. Matriks Toeplitz

- Matriks Toeplitz memiliki sifat : Jika $\mathbf{T}$ adalah matriks Toeplitz, dan $\mathbf{p}$ adalah suatu vektor, dan jika $\mathbf{Tp} = \mathbf{q}$
- Maka, apabila susunan dari elemen di vektor $\mathbf{p}$ dibalik maka susunan dari elemen pada matriks $\mathbf{q}$ juga akan mengikuti terbalik.
- Misal : $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, maka $\mathbf{Tp} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Jika $\mathbf{p}$ diubah susunannya menjadi $\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, maka

  $$\mathbf{Tp}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$
- Sifat ini yang diekploitasi pada iterasi Levinson-Durbin

Latihan Soal

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan vektor dan matriks
2. Jelaskan mengapa aljabar linier sangat penting pada bidang pengolahan sinyal
3. Jelaskan beberapa contoh matriks khusus
4. Apa itu Matriks Unitary?
5. Jelaskan apa itu Matriks Toeplitz dan sebutkan sifat utama dari matriks Toeplitz!