Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

Pertemuan 05 : Proses Auto Regressive (AR)

Oleh : Koredianto Usman

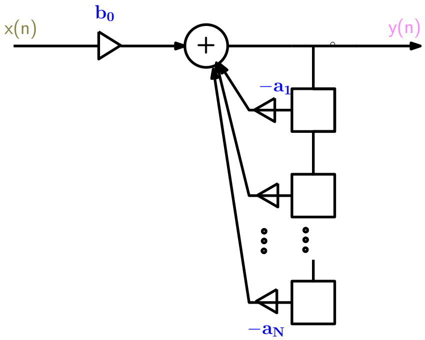
Versi : Juni 2020

Proses Auto Regressive

1. Yang dimaksud dengan proses Auto Regressive (AR) adalah proses melewatkan sinyal stokastik ke filter Auto Regressive
2. Filter AR adalah Filter Infinite Impulse Response (IIR)
3. Pada filter ini terdapat 1 jalur forward tanpa delay dan ditambah dengan struktur feedback.

Struktur FILTER MA

1. Struktur Filter MA orde N ditunjukkan pada Gambar berikut:



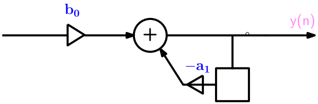
2. Terdapat **N** koefisien filter yaitu a_1 sampai a_N
3. Input dari filter ini adalah Gaussian **N(0,1)**

Proses MA

1. Oleh karena input adalah Gaussian **N(0,1)**
2. Maka fungsi autokorelasi $r_{xx}(0) = 1$, dan $r_{xx}(k) = 0$ untuk $k \neq 0$
3. Jika input Gaussian **N(0,1)** dimasukkan ke filter MA, pertanyaannya adalah bagaimana fungsi autokorelasi dari keluarannya ($r_{yy}(k)$, untuk setiap k)?
4. Seperti halnya proses MA, untuk menjawab pertanyaan ini, maka kita dapat telusuri dari persamaan yang menghubungkan antara input dan output filter

Proses AR

1. Tinjau proses AR orde 1 dengan struktur berikut:



2. Persamaan yang menghubungkan input dengan output adalah: $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1)$
3. Pindahkan semua komponen **y** ke ruas kanan kita peroleh: $y(n) + a_1 y(n-1) = b_0 x(n)$
4. Korelasikan ruas kiri dan kanan dengan $y(n)$, diperoleh:

$$COR(y(n), y(n) + a_1 y(n-1)) = COR(y(n), b_0 x(n))$$

Proses AR

1. Ruas kiri memberikan $r_{yy}(0) + a_1 r_{yy}(-1)$, sedangkan ruas kanan perlu disederhanakan dengan mensubstitusi $y(n)$ dengan $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1)$
2. Diperoleh penyederhanaan untuk ruas kanan: b_0^2
3. Dengan demikian, hasil penyederhanaan dari pengkorelasian dengan $y(n)$ adalah:

$$r_{yy}(0) + a_1 r_{yy}(-1) = b_0^2$$

4. Untuk memperoleh persamaan selanjutnya, kita korelasikan persamaan input-output dengan $y(n-1)$. Dengan cara yang sama, kita peroleh hasil penyederhanaan:

$$r_{yy}(-1) + a_1 r_{yy}(0) = 0$$

Proses AR

1. Jika dilanjutkan dengan mengkorelasikan persamaan input-output dengan $y(n-2)$. Dengan cara yang sama, kita peroleh hasil penyederhanaan:

$$r_{yy}(-2) + a_1 r_{yy}(-1) = 0$$

2. Persamaan-persamaan ini, jika dituliskan dalam matriks, maka kita peroleh persamaan **Yule-Walker** sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \\ r_{yy}(-2) & r_{yy}(-1) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Menyelesaikan Persamaan Yule-Walker

1. Persamaan Yule-Walker biasanya ditulis secukupnya. Untuk AR(1) maka persamaaan ditulis dalam 2 baris menjadi:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Seperti terlihat dalam persamaan di atas, ada dua hal yang dapat diselesaikan dengan Persamaan Yule-Walker:
3. **Permasalahan Analisis**. Pada permasalahan ini, koefisien filter diketahui (**a** dan **b**) sedangkan $r_{yy}(0)$, dan $r_{yy}(-1)$ ditanyakan.
4. **Permasalahan Sintesis**. Pada permasalahan ini, $r_{yy}(0)$, dan $r_{yy}(-1)$ diketahui, dan koefisien filter (**a** dan **b**) ditanyakan.

Contoh 1 : Pemasalahan Analisis

1. Suatu sinyal **x(n)** Gaussian N(0,1)
2. Sinyal ini dimasukkan ke filter AR(1) dengan koefisien $b_0 = 1$ dan $a_1 = 2$
3. Hitung $r_{yy}(0)$ dan $r_{yy}(-1)$
4. **Jawab:** Persamaan Yule-Walker untuk permasalahan ini adalah:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1 : Pemasalahan Analisis - Lanjutan

1. Selesaikan persamaan terakhir diperoleh: $r_{yy}(0) = 2\frac{1}{3}$ dan $r_{yy}(1) = \frac{2}{3}$
2. Permasalahan Analisis dapat dilanjutkan untuk AR orde yang lebih tinggi dengan cara yang sama.
3. Pada contoh berikutnya kita akan membahas tentang permasalahan sintesis

Contoh 2 : Permasalahan Sintesis

Pada permasalahan sintesis, nilai koefisien korelasi diberikan, dan diperlukan cara untuk memperoleh koefisien filter. Perhatikan contoh berikut:

1. Sinyal Gaussian N(0,1) diinputkan ke filter MA(2). Keluaran filter memiliki keluaran dengan koefisien korelasi $r_{yy}(0) = 2$, $r_{yy}(1) = 1$. Tentukan koefisien filter b_0, dan a_1!
2. **Jawab**:
3. Persamaan Yule-Walker dari permasalahan ini adalah:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 : Permasalahan Sintesis - Lanjutan

1. Selesaikan baris 2 persamaan Yule-Walker kita peroleh:
2. $1 + 2a_1 = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$
3. Selesaikan baris 1 persamaan Yule-Walker kita peroleh:
4. $2 + a_1 = b0^2 \rightarrow b_0^2 = 2 - \frac{1}{2} \rightarrow b_0 = \pm\sqrt{3/2}$
5. Dengan demikian filter AR yang dimaksud memiliki koefisien:
6. $a_1 = -\frac{1}{2}$ dan $b_0 = \pm\sqrt{3/2}$

Latihan 01 : Permasalahan Analisis

1. Suatu sinyal **x(n)** Gaussian N(0,1)
2. Sinyal ini dimasukkan ke filter AR(1) dengan koefisien $b_0 = 2$ dan $a_1 = 2$
3. Hitung $r_{yy}(0)$ dan $r_{yy}(-1)$

Jawab: ......

Latihan 02 : Permasalahan Sintesis

1. Sinyal Gaussian N(0,1) diinputkan ke filter MA(2). Keluaran filter memiliki keluaran dengan koefisien korelasi $r_{yy}(0) = 4$, $r_{yy}(1) = 1$. Tentukan koefisien filter b_0, dan a_1!

Jawab: ......

Latihan Soal

1. Tuliskan Persamaan Yule-Walker untuk AR(2)!
2. Tuliskan Persamaan Yule-Walker untuk AR(3)!
3. Tuliskan Persamaan Yule-Walker secara umum untuk AR(N)!