Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

Pertemuan 06 : Proses Auto Regressive Moving Average (ARMA)

Oleh : Koredianto Usman

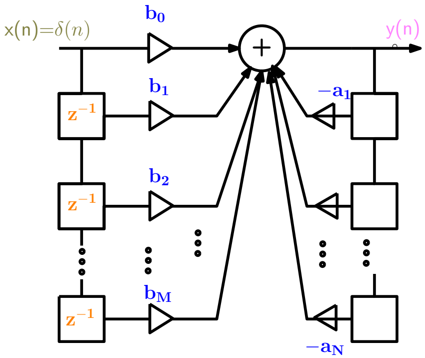
Versi : Juni 2020

Proses Auto Regressive Moving Average

1. Yang dimaksud dengan proses Auto Regressive (ARMA) adalah proses melewatkan sinyal stokastik ke filter Auto Regressive Moving Average
2. Filter ARMA adalah Filter Infinite Impulse Response (IIR)
3. Pada filter ini terdapat beberapa jalur forward (MA) tanpa delay dan ditambah dengan struktur feedback (AR).

Struktur FILTER MA

1. Struktur Filter ARMA(M,N) ditunjukkan pada Gambar berikut:



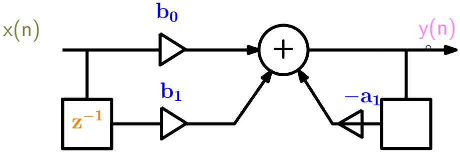
2. Terdapat **N** koefisien filter yaitu a_1 sampai a_N
3. Input dari filter ini adalah Gaussian **N(0,1)**

Proses ARMA

1. Oleh karena input adalah Gaussian **N(0,1)**
2. Maka fungsi autokorelasi $r_{xx}(0) = 1$, dan $r_{xx}(k) = 0$ untuk $k \neq 0$
3. Jika input Gaussian **N(0,1)** dimasukkan ke filter ARMA, pertanyaannya adalah bagaimana fungsi autokorelasi dari keluarannya ($r_{yy}(k)$, untuk setiap k)?
4. Seperti halnya proses MA dan AR untuk menjawab pertanyaan ini, maka kita dapat telusuri dari persamaan yang menghubungkan antara input dan output filter

Proses AR

1. Tinjau proses ARMA(1,1) dengan struktur berikut:



2. Persamaan yang menghubungkan input dengan output adalah: $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1)$
3. Pindahkan semua komponen **y** ke ruas kiri kita peroleh: $y(n) + a_1 y(n-1) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$
4. Korelasikan ruas kiri dan kanan dengan $y(n)$, diperoleh:

$$COR(y(n), y(n) + a_1 y(n-1)) = COR(y(n), b_0 x(n) + b_1 x(n-1))$$

Proses AR

1. Ruas kiri memberikan $r_{yy}(0) + a_1 r_{yy}(-1)$, sedangkan ruas kanan perlu disederhanakan dengan mensubstitusi $y(n)$ dengan $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1)$ dan $y(n-1) = b_0 x(n-1) + b_1 x(n-2) - a_1 y(n-2)$
2. Diperoleh penyederhanaan untuk ruas kanan: $b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1$
3. Dengan demikian, hasil penyederhanaan dari pengkorelasian dengan $y(n)$ adalah:

$$r_{yy}(0) + a_1 r_{yy}(-1) = b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1$$

4. Untuk memperoleh persamaan selanjutnya, kita korelasikan persamaan input-output dengan $y(n-1)$. Dengan cara yang sama, kita peroleh hasil penyederhanaan:

$$r_{yy}(-1) + a_1 r_{yy}(0) = b_0 b_1$$

Proses AR

1. Jika dilanjutkan dengan mengkorelasikan persamaan input-output dengan $y(n-2)$. Dengan cara yang sama, kita peroleh hasil penyederhanaan:

$$r_{yy}(-2) + a_1 r_{yy}(-1) = 0$$

2. Persamaan-persamaan ini, jika dituliskan dalam matriks, maka kita peroleh persamaan **Yule-Walker** sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \\ r_{yy}(-2) & r_{yy}(-1) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1 \\ b_0 b_1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Menyelesaikan Persamaan Yule-Walker

1. Persamaan Yule-Walker biasanya ditulis secukupnya. Untuk AR(1) maka persamaaan ditulis dalam 3 baris menjadi:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \\ r_{yy}(-2) & r_{yy}(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1 \\ b_0 b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Seperti halnya proses AR terlihat dalam persamaan di atas, ada dua hal yang dapat diselesaikan dengan Persamaan Yule-Walker:
3. **Permasalahan Analisis**. Pada permasalahan ini, koefisien filter diketahui (**a** dan **b**) sedangkan $r_{yy}(0)$, dan $r_{yy}(-1)$ ditanyakan.
4. **Permasalahan Sintesis**. Pada permasalahan ini, $r_{yy}(0)$, dan $r_{yy}(-1)$ diketahui, dan koefisien filter (**a** dan **b**) ditanyakan.

Menyelesaikan Persamaan Yule-Walker

1. Persamaan Yule-Walker biasanya ditulis secukupnya. Untuk AR(1) maka persamaaan ditulis dalam 3 baris menjadi:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \\ r_{yy}(-2) & r_{yy}(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1 \\ b_0 b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Seperti halnya proses AR terlihat dalam persamaan di atas, ada dua hal yang dapat diselesaikan dengan Persamaan Yule-Walker:
3. **Permasalahan Analisis**. Pada permasalahan ini, koefisien filter diketahui (**a** dan **b**) sedangkan $r_{yy}(0)$, dan $r_{yy}(-1)$ ditanyakan.
4. **Permasalahan Sintesis**. Pada permasalahan ini, $r_{yy}(0)$, dan $r_{yy}(-1)$ diketahui, dan koefisien filter (**a** dan **b**) ditanyakan.

Contoh 1 : Pemasalahan Analisis

1. Suatu sinyal **x(n)** Gaussian N(0,1)
2. Sinyal ini dimasukkan ke filter ARMA(1,1) dengan koefisien $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ dan $a_1 = 2$
3. Hitung $r_{yy}(0)$, $r_{yy}(-1)$ serta $r_{yy}(-2)$
4. **Jawab:** Persamaan Yule-Walker untuk permasalahan ini adalah:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \\ r_{yy}(-2) & r_{yy}(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1 \\ b_0 b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1 : Pemasalahan Analisis - Lanjutan

1. Masukkan koefisien filter, persamaan Yule-Walker menjadi:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \\ r_{yy}(-2) & r_{yy}(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Gunakan baris 1 dan baris 2 untuk menyelesaikan $r_{yy}(0)$ dan $r_{yy}(-1)$, diperoleh: $r_{yy}(0) = 1$ dan $r_{yy}(-1) = 2/3$
3. Gunakan baris 3 , diperoleh: $r_{yy}(-2) = -2r_{yy}(-1) = -4/3$
4. Dengan demikian koefisien autokorelasi output adalah $r_{yy}(0) = 1$ dan $r_{yy}(-1) = 2/3$ serta $r_{yy}(-2) = -4/3$

Contoh 2 : Permasalahan Sintesis

Pada permasalahan sintesis, nilai koefisien korelasi diberikan, dan diperlukan cara untuk memperoleh koefisien filter. Perhatikan contoh berikut:

1. Sinyal Gaussian N(0,1) diinputkan ke filter ARMA(2). Keluaran filter memiliki keluaran dengan koefisien korelasi $r_{yy}(0) = 4$, $r_{yy}(1) = 1$ dan $r_{yy}(2) = 1/2$. Tentukan koefisien filter b_0, b_1 dan a_1!
2. **Jawab**:
3. Persamaan Yule-Walker dari permasalahan ini adalah:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \\ r_{yy}(-2) & r_{yy}(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1 \\ b_0 b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 : Permasalahan Sintesis - Lanjutan

1. Masukkan koefisien filter, persamaan Yule-Walker menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - a_1 b_0 b_1 \\ b_0 b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Baris 3 digunakan untuk menyelesaian a_1, dan baris 1 dan baris 2 sekaligus menyelesaikan b_1 dan b_0.
3. Nilai a_1, b_0 dan b_1 ditinggalkan sebagai bahan latihan mahasiswa.

Latihan 01 : Permasalahan Analisis

1. Suatu sinyal **x(n)** Gaussian N(0,1)
2. Sinyal ini dimasukkan ke filter ARMA(1,1) dengan koefisien $b_0 = 2$, $b_0 = 2$ dan $a_1 = 2$
3. Hitung $r_{yy}(0)$ dan $r_{yy}(-1)$

Jawab: . . . . . .

Latihan 02 : Permasalahan Sintesis

1. Sinyal Gaussian N(0,1) diinputkan ke filter ARMA(1,1). Keluaran filter memiliki keluaran dengan koefisien korelasi $r_{yy}(0) = 4$, $r_{yy}(1) = 1$ dan $r_{yy}(1) = -1/2$. Tentukan koefisien filter b_0, b_1 dan a_1!

Jawab: ......

Latihan Soal

1. Tuliskan Persamaan Yule-Walker untuk ARMA(2,2)! (**Petunjuk**, tuliskan persamaan yang menghubungkan input dan output dari persamaan dari filter, kemudian korelasikan masing-masing dengan y(n), y(n-1), dan y(n-2), y(n-3), dan y(n-4)).