



Telkom
University

Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3

**Pertemuan 10 : Perbandingan Metode
Pade dan Prony
Oleh : Koredianto Usman**

Versi : Juni 2020

Perbandingan Metode Pade dan Prony

- 1 Pada slide 8 dan 9 ini telah dibahas teknik pemodelan sinyal dengan metode Pade dan Prony
- 2 Paada slide 10 ini, kita akan melakukan komparasi dari kedua metode tersebut dengan menggunakan ukuran kemiripan sinyal yaitu Mean Square Error.

Mean Square Error

- 1 Di antara besaran yang dipakai untuk mengukur kedekatan dua sinyal, Mean Square Error (MSE) adalah salah satu yang penting
- 2 MSE dari sinyal \mathbf{x} dan sinyal \mathbf{y} adalah:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{i=N-1} (y_i - x_i)^2$$

- 3 Semakin kecil nilai MSE, maka semakin mirip dua sinyal.
- 4 $MSE = 0$ berarti kedua sinyal adalah identik.
- 5 Untuk membandingkan pemodelan sinyal dengan menggunakan metode Pade dan Prony, maka kita dapat membandingkan hasil model dengan sinyal yang akan dimodelkan dengan menggunakan ukuran MSE

Mean Square Error

- 1 Misalkan akan dibandingkan 2 metode yaitu Metode A dan Metode B.
- 2 Sinyal asli misalkan adalah $\mathbf{s} = [2 \ 2 \ 3 \ 3]$
- 3 Dengan metode A diperoleh hasil rekonstruksi $\mathbf{s}_A = [1 \ 2 \ 2 \ 3]$
- 4 Dengan metode B diperoleh hasil rekonstruksi $\mathbf{s}_B = [2 \ 2 \ 3 \ 8]$
- 5 Metode mana yang lebih baik?
- 6 Jika kita hitung MSE antara sinyal asli dengan hasil rekonstruksi metode A kita peroleh MSE-A yaitu:

$$MSE-A = \frac{1}{4} [(2 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (3 - 3)^2] = \frac{2}{4}$$

Mean Square Error

- 1 Jika kita hitung MSE antara sinyal asli dengan hasil rekonstruksi metode B kita peroleh MSE-B yaitu: $MSE - B = \frac{1}{4} [(2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (3 - 8)^2] = \frac{25}{4}$
- 2 Karena $MSE - A = \frac{2}{4} < \frac{25}{5} = MSE - B$
- 3 Maka dikatakan bahwa rekonstruksi dengan metode A lebih baik dibandingkan dengan rekonstruksi dengan metode B.
- 4 Tentu saja, disamping MSE, ada ukuran lain yang digunakan untuk memeriksa kemiripan dari dua sinyal, yaitu Mean Absolute Error (MAE), PSNR dan sebagainya.
- 5 Setelah pengantar terkait MSE sudah disampaikan, berikutnya kita akan membandingkan secara umum akurasi dari metode Pade dan Prony.

Ilustrasi

Untuk keperluan perbandingan ini, kita akan menggunakan panjang sinyal yang lebih panjang dari pada derajat kebebasan filter.

- 1 Misalkan sinyal referensi adalah $s(n) = [1 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1]$, akan dimodelkan dengan Pade ARMA(1,1) dan Prony ARMA(1,1). Bagaimana perbandingan MSE keduanya?
- 2 **Jawab:**
- 3 **Pertama Model Pade**
- 4 Set persamaan Pade adalah:

Ilustrasi-lanjutan

- 1 Dengan ARMA(1,1) dan panjang sinyal 6 maka set persamaan Pade menjadi:

$$\begin{matrix} 2 \\ \left[\begin{array}{cc} s_0 & 0 \\ s_1 & s_0 \\ s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \\ s_4 & s_3 \\ s_5 & s_4 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 3 Perhitungan nilai a_1 dapat dilakukan dengan menggunakan baris 3 sampai baris 6, dengan hasil yang berbeda-beda.
- 4 Mari kita pilih baris 3 untuk penghitung a_1
- 5 $3 + 3a_1 = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{3} = -1$

Ilustrasi-lanjutan

- 1 Gunakan baris 1, diperoleh $b_0 = 1$
- 2 Gunakan baris 2: $3 + a_1 = b_1 \rightarrow b_1 = 3 - 1 = 2$
- 3 dengan demikian, maka koefisien filter PADE adalah:
 $a_1 = -1$, $b_0 = 1$, dan $b_1 = 2$
- 4 Dengan setting ini, maka untuk input filter berupa sinyal impulse maka keluaran filter adalah:
- 5 $y_{PADE} = [1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$

Ilustrasi-lanjutan2

- ➊ Selanjutnya kita gunakan **metode Prony**.
- ➋ Set persamaan Prony adalah sama dengan set persamaan

$$\text{Pade yaitu: } \begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ s_1 & s_0 \\ s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \\ s_4 & s_3 \\ s_5 & s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ➌ Baris 3 sampai 6 disusun ulang menjadi

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- ➍ setelah kedua ruas dikalikan dengan $[3 \ 3 \ 2 \ 1]$ diperoleh:

$$a_1 = -\frac{18}{23}$$

Jawab - lanjutan2

- 1 Dari baris pertama set persamaan prony kita peroleh: $b_0 = 1$
- 2 dari baris kedua, diperoleh: $3 + a_1 = b_1 \rightarrow b_1 = 3 - \frac{18}{23} = 2\frac{5}{23}$
- 3 Dengan demikian koefisien berdasarkan model Prony ini adalah: $a_1 = -\frac{18}{23}$, $b_0 = 1$, dan $b_1 = 2\frac{5}{23}$
- 4 Dengan setting ini, maka untuk input filter berupa sinyal impulse maka keluaran filter adalah:
- 5 $y_{PRONY} = [1 \ 3 \ 2,35 \ 1,84 \ 1,44 \ 1,16]$

Jawab - lanjutan3

- 1 Mari kita melakukan rekapitulasi:
- 2 Sinyal asli: $s(n) = [1 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1]$
- 3 Hasil model Pade : $y_{PADE} = [1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$
- 4 Hasil model Prony: $y_{PRONY} = [1 \ 3 \ 2,35 \ 1,84 \ 1,44 \ 1,16]$
- 5 MSE model Pade dibanding sinyal asli: $MSE - PADE = \frac{1}{6} [(1 - 1)^2 + (3 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (1 - 3)^2 + (1 - 3)^2]$
atau $MSE - PADE = \frac{9}{6}$
- 6 MSE model Prony dibanding sinyal asli: $MSE - PRONY = \frac{1}{6} [(1 - 1)^2 + (3 - 3)^2 + (3 - 2,35)^2 + (2 - 1,84)^2 + (1 - 1,44)^2 + (1 - 1,16)^2]$
atau $MSE - PRONY = \frac{0,667}{6}$
- 7 Terlihat bahwa MSE Prony lebih kecil dibandingkan dengan metode Pade.

Perbandingan umum antara metode Pade dan Prony

- 1 Secara komputasi metode Pade lebih sederhana
- 2 Metode Prony perhitungannya lebih berat karena perlu menyelesaikan persamaan Least Square
- 3 Untuk panjang sinyal sama dengan derajat kebebasan filter, maka kinerja kedua filter adalah sama
- 4 Untuk panjang sinyal yang lebih besar dari derajat kebebasan filter, maka kinerja Filter Prony, diukur dengan menggunakan MSE akan lebih baik dibandingkan dengan metode Pade.

Latihan 01

- 1 Bandingkan kinerja metode Pade dan Prony untuk kasus berikut:
- 2 Sinyal referensi $s(n) = [4 \ 4 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$
- 3 Tentukan keluaran kedua model tersebut, serta
- 4 hitunglah MSE dari keduanya dibandingkan dengan sinyal referensi!

Jawab:

Latihan Soal

Bandingkan kinerja dari model Pade dan Prony pada kasus berikut:

- 1 Sinyal $s(n) = [4 \ 4 \ 2 \ 1 \ 1]$, akan dimodelkan dengan ARMA(2,1).
Tuliskan nilai keluaran model Pade dan model Prony dan hitung MSE keduanya!
- 2 Sama dengan dengan soal di atas namun realisasikan dnegan ARMA(1,2)!